Proposta de Resolução da Sociedade Portuguesa de Matemática

para o Exame Nacional de Matemática B

Prova 735, 1ª fase – 26 de Junho de 2014

GRUPO I

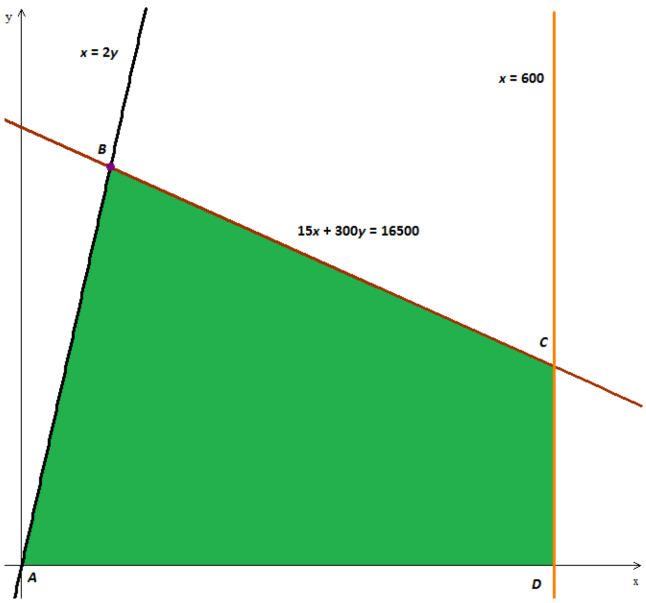
A função objectivo que se pretende maximizar é $L = 1000x + 25000y$. Quanto às restrições do problema:

- o facto de o tempo mensal na rádio dever ser, pelo menos, o dobro do tempo na televisão, leva a $x \geq 2y$;
- o limite mensal de tempo na rádio conduz a $x \leq 600$;
- a disponibilidade de 16500 por mês para publicidade, permite concluir que
- $15x + 300y \leq 16500$.

Tem-se assim o sistema

$\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x \geq 2y \\ x \leq 600 \\ 15x + 300y \leq 16500 \end{cases}$ ou, após simplificação, $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x \geq 2y \\ x \leq 600 \\ x + 20y \leq 1100 \end{cases}$

A região admissível é



As coordenadas dos pontos *A* e *D* são, trivialmente, (0, 0) e (600, 0).

Quanto aos pontos *B* e *D*, basta resolver os sistemas

$$\begin{cases} x = 2y \\ 15x + 300\,y = 16500 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 600 \\ 15x + 300\,y = 16500 \end{cases}$$

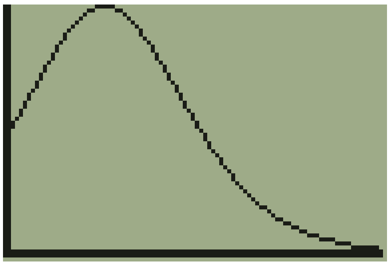
para se obter *B*(100, 50) e *D*(600, 25).

Calculando o valor da função objectivo nos quatro vértices da região admissível, verifica-se que o máximo é 1350000, atingido no ponto *B*. Devem assim usar-se 100 de publicidade na rádio e 50 minutos na televisão.

GRUPO II

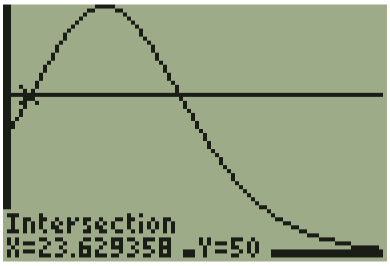
1.1 Recorrendo ao gráfico da função *N*, verifica-se que o número pedido é

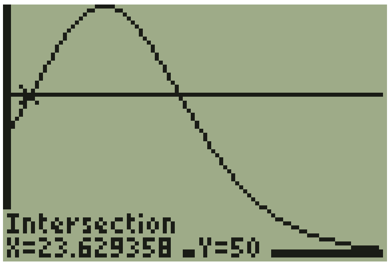
$$7800 - N(365) \times 100 \approx 7613$$



(repare-se que 365 corresponde ao último dia do ano).

1.2 Tracemos no gráfico anterior a recta de equação $y = 50$ (5000 corresponde a 50 centenas) e procuremos as suas intersecções com o gráfico da função *N*.





Resulta destes gráficos que o número pedido é $(23 - 1 + 1) + (365 - 170 + 1) =$
$= 219.$

2.1 Não, pois de acordo com a Figura 1, a função G é estritamente crescente e portanto a sua derivada é positiva.

2.2

Afirmação I: O número de telemóveis em causa é, em centenas, $G(0) - F(0) = G(0) - (G(0) - 3) = 3$, pelo que esta afirmação é verdadeira.

Afirmação II: Embora $G(4) \approx 18{,}59$, correspondente a 1859 telemóveis, $G(4)$ **não** é o número de telemóveis vendidos em Guimarães nos quatro primeiros meses de 2013, pois inclui também os telemóveis vendidos em 2012. Assim, a afirmação é falsa.

Afirmação III: É óbvio, a partir do gráfico, que o número de telemóveis vendidos em Faro aumenta com o tempo, Quanto ao resto, resulta do gráfico, que $G(t) < 30$ para todos os valores de t. Assim, $F(t) = G(t) - 3 < 27$, para todos os valores de t e portanto o valor nunca atingiu 28 centenas de telemóveis. A afirmação é verdadeira.

GRUPO III

1.1.1 O facto de a correlação ser negativa é óbvio, pois $r < 0$; quanto ao resto, a correlação é forte, pois $|r| > 0{,}9$.

1.1.2 Uma interpretação correcta é

O valor de r indica que, quando aumenta a altitude, a média anual das temperaturas, tende a diminuir.

1.2 As estações a considerar são Braga, Coimbra, Castelo Branco, Santarém, Setúbal, Évora, Beja e Faro, num total de oito, que nos dá o número de casos possíveis.

As estações onde a temperatura máxima subiu pelo menos 0,5ºC foram Braga, Castelo Branco, Santarém, Setúbal, Évora e Beja, num total de seis, que nos dá o número de casos favoráveis. Pela Regra de Laplace, a probabilidade pedida é $p = \frac{6}{8} = 75\%$.

2.1 Considere-se a seguinte tabela, obtida recorrendo à calculadora e onde $D(n) = |B(n) - L(n)|$

n	$D(n)$
1	19,624
2	18,946
3	14,319
4	6,9934
5	0,9951
6	7,4052
7	10,426
8	9,1949
9	4,0488
10	3,5713
11	11,529
12	17,6

Resulta imediatamente que a maior diferença é para $n = 1$, correspondente ao mês de Janeiro.

2.2 Não, pois vê-se na tabela que a função *D* não se anula.

GRUPO IV

1.1 A área pedida é a diferença entre a área do quadrado e a soma das áreas dos conjuntos I, II e III.

Calculemos o raio da primeira circunferência: da equação $\pi r^2 = 25\pi$, resulta que o raio é 5. Assim, o raio da segunda circunferência é 10, da terceira é 15,… e o raio da 20ª é $5 + (20 - 1) \times 5 = 100$, atendendo à fórmula do tremo geral das progressões aritméticas. O diâmetro da 20ª circunferência é pois 200 e, da Figura 5, o lado do quadrado é $200 + 100 = 300$.

Quanto à área do conjunto I, A_I, ela é dada por $A_I = \pi \times 100^2$; para os dois outros conjuntos, as suas áreas, A_{II} e A_{III}, são iguais e tem-se $A_{II} = A_{III} = \frac{\pi \times 100^2}{2}$, pelo que a área pedida é $300^2 - \left(\pi \times 100^2 + \frac{\pi \times 100^2}{2} + \frac{\pi \times 100^2}{2}\right)\ \mathrm{cm}^2 \approx 2{,}7\ \mathrm{m}^2$.

1.2.1 Basta verificar que $A_{n+1} - A_n = 50\pi$ para qualquer valor de *n*.

1.2.2 Para calcular a área a preto relativa ao conjunto I, temos de calcular

$$A_2 + A_4 + \cdots + A_{20}$$

A área total a preto obtém-se multiplicando este valor por 2.

$A_2 + A_4 + \cdots + A_{20} =$

$= (50\pi \times 2 - 25\pi) + (50\pi \times 4 - 25\pi) + \cdots + (50\pi \times 20 - 25\pi) =$

$=50\pi(2 + 4 + 6 + \cdots + 20) - 10 \times 25\pi = 5250\pi$

Quanto a A_1, vem $A_1 = 50\pi \times 1 - 25\pi = 25\pi$ e, por uma regra de três, a quantidade de tinta preta gasta é $\frac{5250\pi\times1}{25\pi} = 210 \text{ cl} = 2{,}1 \text{ l}$.

2. Por um lado, a área da coroa circular é dada por $\pi \times \overline{OQ}^2 - \pi \times \overline{OP}^2 = \pi(b^2 - a^2)$.

Por outro lado, sabe-se da geometria elementar, que as rectas *OP* e *PQ* são perpendiculares, pelo que o triângulo [*OPQ*] é rectângulo em *P*. Pelo Trorema de Pitágoras, $\overline{OP}^2 + \overline{QP}^2 = \overline{OQ}^2$ ou seja, $a^2 + \overline{QP}^2 = b^2$ ou ainda $\overline{QP}^2 = b^2 - a^2$. Como a área do círculo de centro no ponto *P* e raio $\overline{QP}$ é $\pi \times \overline{QP}^2$, segue-se o resultado.

--//--