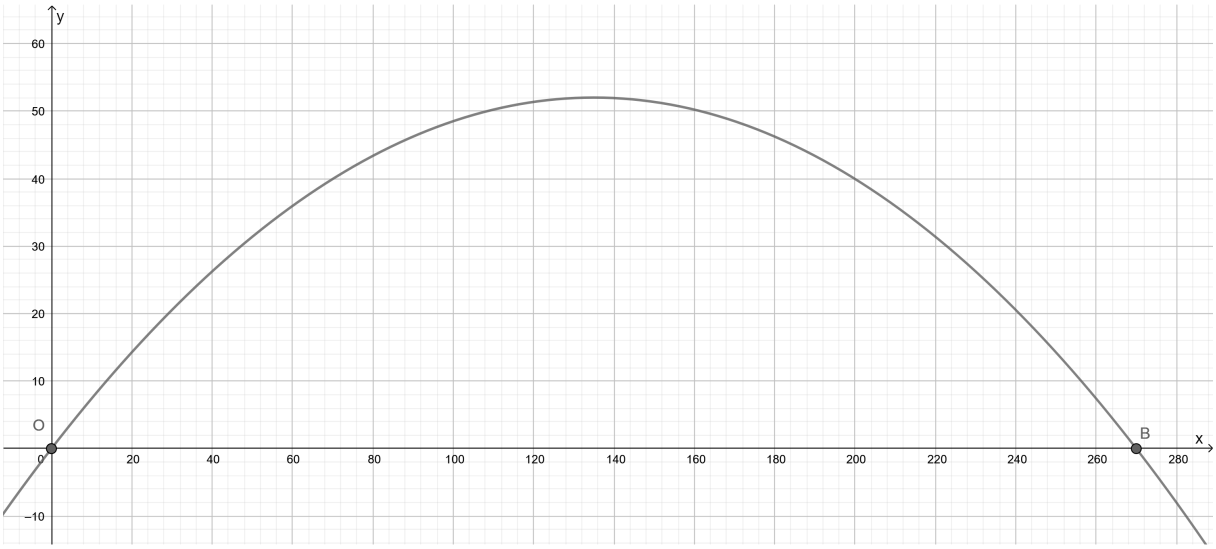
Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 1.ª FASE – 25 DE JUNHO 2019

1.

1.1. Utilizando as capacidades gráficas da calculadora obtemos a representação gráfica da função:

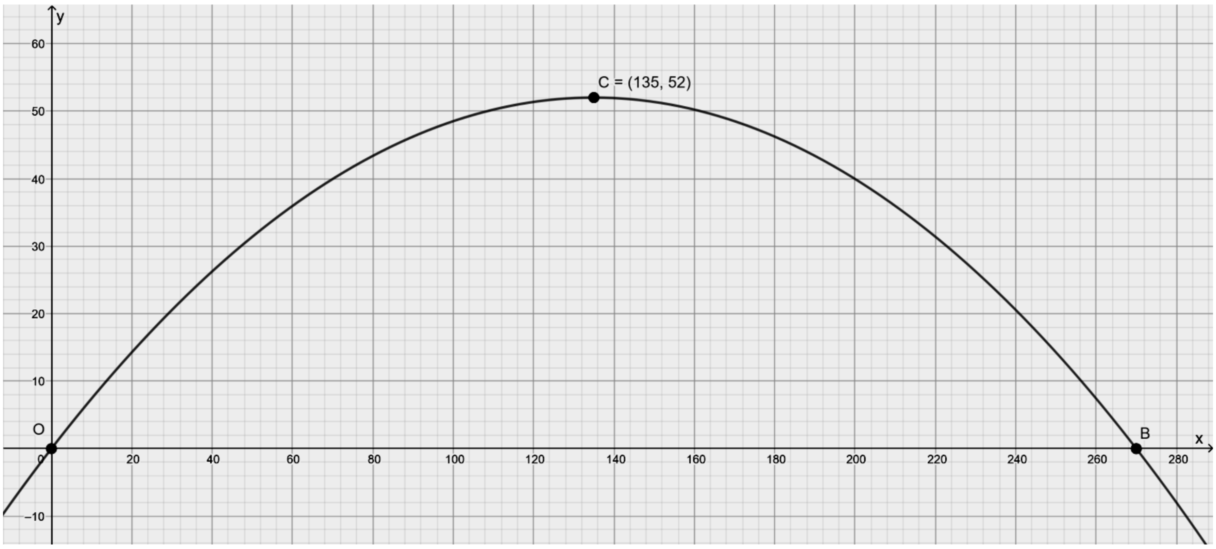


Assim, conseguimos obter as coordenadas do ponto B através da intersecção do gráfico da função com o eixo Ox, obtendo $B(270\,,0)$

Como o ponto O tem coordenadas (0,0), podemos afirmar que a distância até ao ponto B é de 270. Assim, o comprimento do vão da Ponte Arrábida é de 270 metros.

1.2.

Utilizando novamente as capacidades gráficas da calculadora obtemos as coordenadas do máximo da função, ponto $C(134,9\,;52)$.



Como o ponto A tem a mesma abcissa do ponto C, a ordenada do ponto C indica assim o comprimento de $[AC]$

O comprimento da flecha da Ponte Arrábida é de 52 metros.

2.

2.1.

O número de visitantes no primeiro dia é dado por $N(0)$ e no último é dado por $N(364)$

$$N(0)=\frac{8000}{1+4e^{-0,02\times 0}}=1600$$

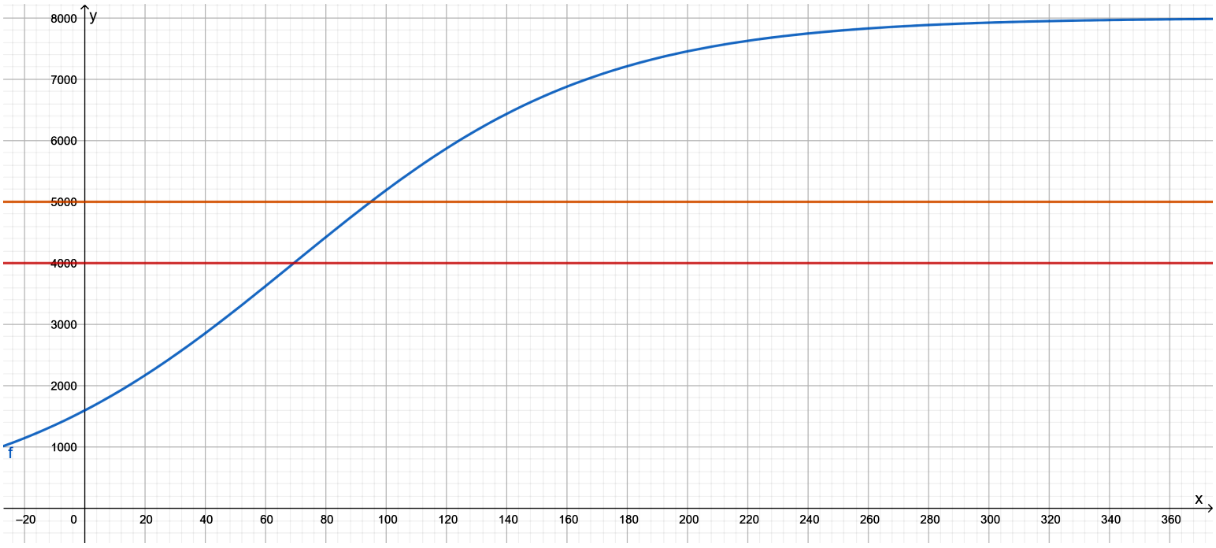
$$N(364)=\frac{8000}{1+4e^{-0,02\times 364}}=7978,007$$

$$7978,007-1600\approx 6378$$

A diferença entre o número de visitantes do museu no último dia daquele ano e o número de visitantes do museu no dia da abertura é de 6378 visitantes.

2.2.

Utilizando as capacidades gráficas da calculadora obtemos a representação do modelo apresentado e das retas $y = 4000$ e $y = 5000$



Calculamos as interseções entre as retas e o modelo obtendo os seguintes pontos de interseção $(69{,}31\,;4000)$ e $(94{,}86;5000)$

Entre o 70.º dia após a abertura e o 94.º o número de visitantes do museu foi superior a 4000 e inferior a 5000, isto é, durante $94 - 70 + 1 = 25$ dias.

3.

3.1.

20 sacos de milho vendidos correspondem a 20 euros de lucro.

Ora $80 - 20 = 60$.

Como o lucro dos sacos de trigo é de 2 euros e 60 é múltiplo de 2, vendendo 30 sacos de trigo obtemos o lucro total de 80 euros, pelo que é possível que corresponda a um lucro diário.

3.2.

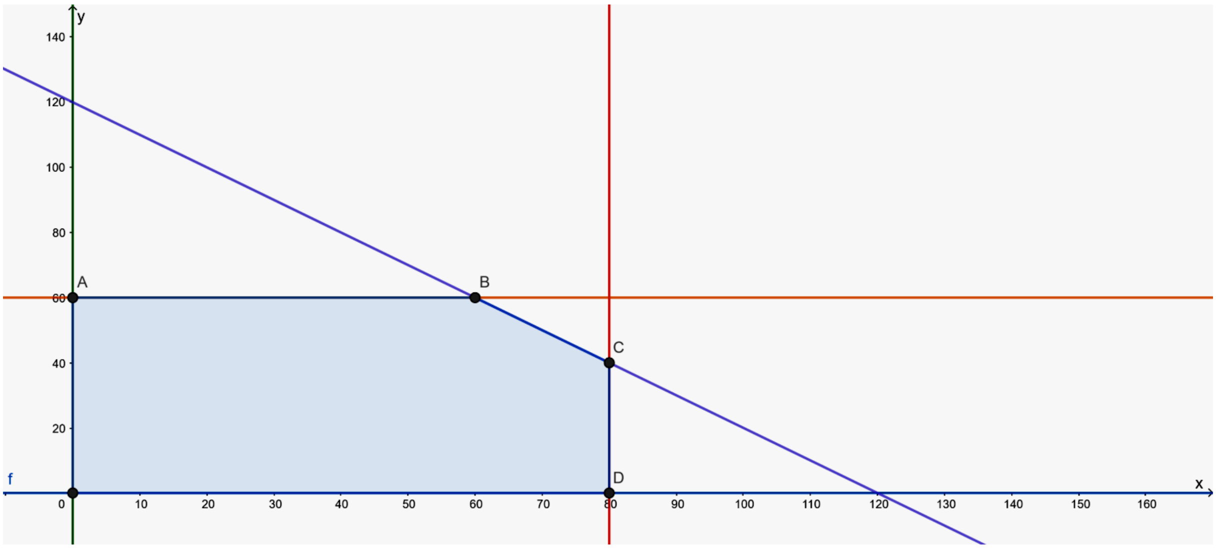
Seja: x o número de sacos de milho e y o número de sacos de trigo

x sacos de milho utilizam x kg de milho e y sacos de trigo utilizam y kg de trigo

A função objetivo, que pretendemos maximizar é: $f(x,y)=x+2y$

As restrições do problema são: $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x\leq 80 \\ y\leq 60 \\ x+y\leq 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x\leq 80 \\ y\leq 60 \\ y\leq -x+120 \end{cases}$

Construamos a região das soluções admissíveis:



Determinando as intersecções correspondentes aos vértices da região admissível, averiguamos a solução ótima:

(x,y)	$f(x,y)$	
$A(0,60)$	$f(0,60)=0+2\times 60=120$	
$B(60,60)$	$f(60,60)=60+2\times 60=180$	⟵ <u>solução ótima</u>
$C(80,40)$	$f(80,40)=80+2\times 40=160$	
$D(80,0)$	$f(80,0)=80+2\times 0=80$	

Desta forma, para obter o lucro diário máximo de 180 € a padaria deve vender 60 saquinhos de milho e 60 saquinhos de trigo.

4.

4.1. Sejam (x_P, y_P), as coordenadas do ponto P.

Então: $\operatorname{sen}\theta = \frac{y_P}{15} \quad \Leftrightarrow \quad y_P = 15\operatorname{sen}\theta$

Seja R o ponto de intersecção do eixo das ordenadas com o nível da base. Temos assim que:

$\overline{RO} = 18 + 15 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{RO} = 33$

Ora $h(\theta) = \overline{RO} + y_P$

Logo $h(\theta) = 33 + 15\operatorname{sen}\theta$ c.q.d.

4.2. Pretende-se determinar os valores de $\theta \in [0, 2\pi]$ para os quais $h(\theta) = 40,5$.

Ou seja,

$$\begin{aligned} & 33 + 15\operatorname{sen}\theta = 40,5 && \wedge \quad \theta \in [0, 2\pi] \\ \Leftrightarrow \quad & 15\operatorname{sen}\theta = 7,5 && \wedge \quad \theta \in [0, 2\pi] \\ \Leftrightarrow \quad & \operatorname{sen}\theta = 0,5 && \wedge \quad \theta \in [0, 2\pi] \\ \Leftrightarrow \quad & \theta = \frac{\pi}{6} \ \vee \ \theta = \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

Logo, $\theta \simeq 0,52$ radianos ou $\theta \simeq 2,62$ radianos

5.

5.1. Os comprimentos dos lados das bases maiores dos troncos de pirâmide estão em progressão aritmética, digamos, (d_n), de razão $r = -5,25$.

O tronco superior é o nono.

Então, como $d_9 = d_1 + 8r$, temos que $d_9 = 55 + 8 \times (-5,25) = 13$

O comprimento pedido é igual a 13 metros.

5.2. Seja (t_n) a sucessão em que cada termo corresponde ao tempo que o turista fica no degrau n.

Como o quociente entre cada termo e o anterior é sempre constante, temos que os termos de (t_n) estão em progressão geométrica de razão $r = 1,05$.

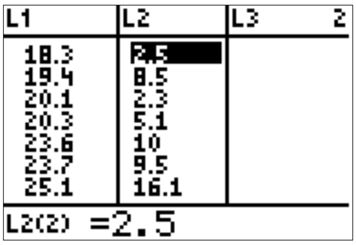
O tempo de subida corresponde à soma dos 91 primeiros termos da progressão:

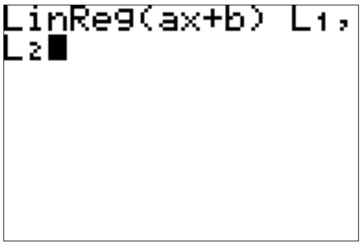
$$S_{91} = 0,5 \times \frac{1 - 1,05^{91}}{1 - 1,05} = 0,5 \times \frac{1 - 84,767}{-0,05} \approx 837,67 \text{ s}$$

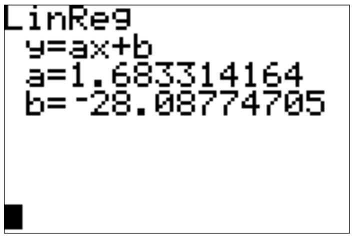
$837,67 : 60 \approx 14$ minutos

O turista demorou aproximadamente 14 minutos a subir toda a escadaria.

5.3. Recorrendo às capacidades da calculadora editamos duas listas, digamos, L_1 e L_2, com **todos** os dados fornecidos e procuramos de seguida os parâmetros do modelo de regressão linear, obtendo:



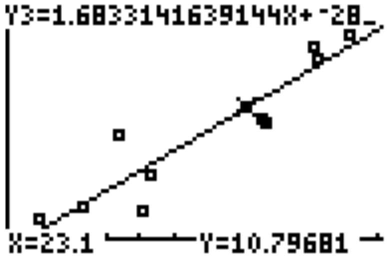




Temos assim que, com $a \approx 1{,}683$ e $b \approx -28{,}088$, obtém-se o modelo $y = 1{,}683x - 28{,}088$.

Resta-nos agora calcular o valor de y quando $x = 23{,}1$

Podemos fazer isso graficamente:



ou analiticamente: $y = 1{,}683 \times 23{,}1 - 28{,}088 \approx 10{,}8$

Assim, o tempo de subida para um turista com Imc de 23,1 estima-se em 10,8 minutos.

6.

6.1. Pretende-se determinar o volume do tronco de pirâmide. Para isso vamos determinar o volume da pirâmide original e subtrair-lhe o volume da cúspide que desapareceu com o tempo ("ponta" da pirâmide original, que é uma pirâmide também).

As bases das pirâmides são quadrados.

Tem-se que $\overline{EG} = 146{,}5 - 138{,}8 = 7{,}7m$.

Os triângulos [*AGC*] e [*DGF*] são semelhantes (critério AA).

Assim,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{EG}} \Leftrightarrow \frac{230{,}4}{\overline{DF}} = \frac{146{,}5}{7{,}7} \Leftrightarrow \overline{DF} \simeq 12{,}110m$$

Logo o volume atual do monumento é dado por:

$$\frac{1}{3} \times 230{,}4^2 \times 146{,}5 - \frac{1}{3} \times 12{,}110^2 \times 7{,}7 \simeq 2591900m^3$$

6.2. Temos que $230,4 \div 2 = 115,2$

Desta forma o ponto *C* tem coordenadas $(115,2\,;\,0)$.

O ponto simétrico de *C* em relação ao eixo das ordenadas tem coordenadas $(-115,2\;;\;0)$.

6.3. Seja *X* a variável aleatória "quantidade de pedra instalada por dia".

Tem-se que $X \sim N(800,12)$ e pretende-se determinar a $P(X < 776)$.

$P(X < 776) = P(X < 800)\; - P(776 < X < 800)$

Recorrendo à calculadora gráfica, determinamos a $P(776 < X < 800)$:

normalcdf (776, 800, 800, 12), obtendo-se $P(776 < X < 800) \simeq 0,47725$.

Por outro lado tem-se que $P(X < 800) = 0,5$, pelo que

$P(X < 776) = 0,5 - 0,47725 \simeq 2,3\%$.

FIM