

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO  
SECUNDÁRIO  
(CÓDIGO DA PROVA 735) – 2ª FASE – 22 DE JULHO 2019**

1.

1.1. Na calculadora gráfica, preenchamos as listas L1 e L2, como a seguinte tabela sugere.

L1	L2
0	1700
1	1710
2	2008
3	2600
5	3485
6	4500
7	5250
9	5470
10	6080
12	6750
13	6890
14	7000
17	7630
18	7545
20	7485

Selecionamos a opção *Logistic*, no separador *Calc* do menu *STAT*, sendo:

- XList: L1
- YList: L2

Obtemos os seguintes resultados, arredondados às milésimas:

- $a = 4,399$
- $b = 0,285$
- $c = 7689,213$

Pelo que o modelo logístico, correspondente aos dados, desta população de focas é

$$y = \frac{7689,213}{1 + 4,399e^{-0,285x}}$$

O início de 1986 corresponde a  $x = 11$   
Recorrendo ainda à calculadora gráfica:

- definimos a função  $Y_1$

$$Y_1 = \frac{7689,213}{1 + 4,399e^{-0,285x}}$$

- calculamos o valor de  $Y_1$  quando  $x = 11$

**Resposta:** Com base neste modelo logístico o número de focas existentes no início do ano de 1986 é estimado em 6454.

1.2. De acordo com os dados podemos construir a seguinte tabela:

$t$	$F(t)$ = nº de focas em:
0	01/01/1980
1	01/01/1981
2	01/01/1982
3	01/01/1983
4	01/01/1984
5	01/01/1985

Como  $t = 2$  corresponde a 01/01/1982 e  $t = 5$  corresponde a 01/01/1985, então

$$TVM_{[2,5]} = 647$$

representa a taxa de variação média, entre as zero horas do dia 1 de janeiro de 1982 e as zero horas do dia 1 de janeiro de 1985 que nos mostra a forma como aumentou (porque é positiva) a população de focas.

**Resposta:** No período compreendido entre as zero horas do dia 1 de janeiro de 1982 e as zero horas do dia 1 de janeiro de 1985 a população de focas teve um crescimento médio de 647 animais por ano.

2.

2.1. 60 kg de ração do tipo A corresponde a 60 euros de lucro.

$$150 - 60 = 90$$

Como o lucro da ração do tipo B é de 2 euros por cada quilograma  $90 \div 2 = 45$

Assim, teriam que ser vendidos 45 kg de ração do tipo B para que nesse dia o lucro fosse de 150 €. . Porém  $60+45=105$  kg, o que ultrapassa a carga máxima que a carrinha pode transportar.

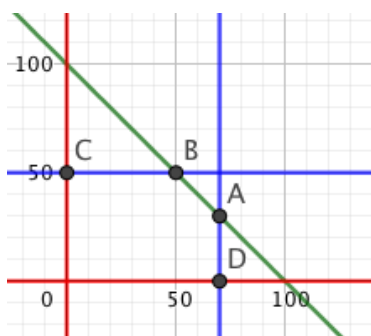
**Resposta:** Nesse dia o lucro não pode ser de 150 euros.

**2.2.** Seja  $x$  o número de quilogramas de ração do tipo A vendida diariamente e, seja  $y$  o número de quilogramas de ração do tipo B vendida diariamente.

A função objetivo que pretendemos maximizar é  $f(x, y) = x + 2y$

$$\text{As restrições do problema são: } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 70 \\ y \leq 50 \\ x + y \leq 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 70 \\ y \leq 50 \\ y \leq -x + 100 \end{cases}$$

Construamos a região das soluções admissíveis:



Determinemos agora as intersecções correspondentes aos vértices da região admissível, e averiguemos qual a solução ótima:

$(x, y)$	$f(x, y) = x + 2y$
$A(70,30)$	$f(70,30) = 70 + 2 \times 30 = 130$
$B(50,50)$	$f(50,50) = 50 + 2 \times 50 = 150$
$C(0,50)$	$f(0,50) = 0 + 2 \times 50 = 100$
$D(70,0)$	$f(70,0) = 70 + 0 = 70$

← Solução ótima

**Resposta:** A família deve vender diariamente 50kg de ração do tipo A e 50 kg do tipo B de forma a obter o lucro máximo diário de 150 euros.

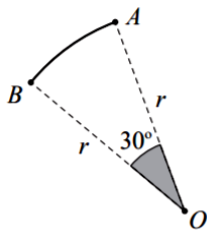
**3.**

**3.1.** Dado que  $r = 12$  e  $tg(\theta) = \frac{6}{r}$ , com  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ , temos que:

$$tg(\theta) = \frac{6}{12} \Leftrightarrow tg(\theta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = tg^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \theta \approx 26,565 \dots$$

**Resposta:**  $\theta = 26,6^\circ$ .

3.2.



Podemos encontrar uma expressão para o comprimento do arco  $AB$  em função do raio  $r$ , através de uma regra de três simples:

$$\frac{360^\circ}{30^\circ} = \frac{2\pi r}{AB} \rightarrow AB = \frac{30^\circ \times 2\pi r}{360^\circ} \Leftrightarrow AB = \frac{\pi r}{6}$$

Como  $\theta = 45^\circ$ , vem que  $\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{r}{6} \Leftrightarrow r = 6$

Assim temos que  $AB = \frac{\pi \times 6}{6} = \pi$

**Resposta:** O comprimento do arco descrito pelo pássaro é, aproximadamente, 3,14 m.

4.

4.1. A altura do poste P é dada por  $h(0)$  e, como o poste Q está 12 metros à direita do poste P a sua altura é dada por  $h(12)$ .

Na calculadora gráfica, podemos definir a função

$$Y_1 = 4(e^{0,125x-0,75} + e^{-0,125x+0,75})$$

No menu TABLE consultamos a tabela que caracteriza esta função

X	Y <sub>1</sub>
0	10.357
1	9.614
2	9.021
3	8.5691
4	8.2513
5	8.0626
6	8
7	8.0626
8	8.2513
9	8.5691
10	9.021
11	9.614
12	10.357

**Nota**

Definindo, no menu TABLESET

- $TblStart = 0$
- $\Delta Tbl = 6$

A tabela poderia ser, p.e.

X	$Y_1$
0	10.357
6	8
12	10.357

Da análise da tabela verifica-se que as imagens de 0 e de 12 são idênticas, o que significa que  $h(0) = h(12)$

**Resposta:** Como  $h(0) = h(12)$  os postes P e Q têm a mesma altura.

**Outro processo:**

Podemos determinar

$$h(0) = 4(e^{-0,75} + e^{0,75}) \text{ e}$$

$$h(12) = 4(e^{1,5-0,75} + e^{-1,5+0,75}) = 4(e^{0,75} + e^{-0,75}) = 4(e^{-0,75} + e^{0,75}),$$

concluindo que  $h(0) = h(12)$ .

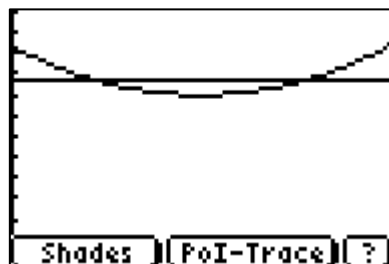
**4.2.** No menu funções, da calculadora gráfica definem-se as funções

- $Y_1 = 4(e^{0,125x-0,75} + e^{-0,125x+0,75})$
- $Y_2 = 8,7$

Com a seguinte janela de visualização

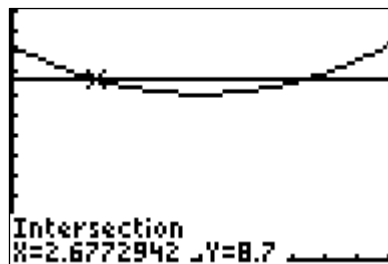
Xmin=0  
 Xmax=12  
 Xscl=2  
 Ymin=0  
 Ymax=12  
 Yscl=2

Obtemos os gráficos:



Verifica-se que os gráficos se intersectam em dois pontos.

Determinamos as coordenadas do ponto de intersecção dos gráficos, de menor abcissa, obtendo  $x = 2.6772942$   $y = 8.7$ :



Como  $12 - 2,7 = 9,3$

Chegamos à resposta.

**Resposta:** O pássaro dista 9,3 metros do poste Q.

5.

5.1. Seja  $a$  o número de andorinhas com mais de dois anos e seja  $b$  o número de andorinhas com menos de dois anos. Sabemos que  $a > b$ .

Então, como  $a$  e  $b$  estão em progressão geométrica:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + b = 121 \\ b = \frac{3}{8} \times a \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 121 \\ b = \frac{3}{8} \times a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 121 - b \\ b = \frac{3}{8} \times (121 - b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 121 - b \\ b + \frac{3}{8}b = \frac{363}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = 121 - b \\ 11b = 363 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 121 - b \\ b = 363 \div 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 121 - 33 \\ b = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 88 \\ b = 33 \end{cases} \end{aligned}$$

**Resposta:** O número de andorinhas com mais de dois anos é 88 e com menos de dois anos é 33.

**5.2.** Seja  $(v_n)$  a sucessão em que cada termo corresponde ao número de andorinhas que levanta voo na vez  $n$ . Sabemos que  $v_n = 2n - 1$

Sabemos assim que  $v_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$  e que todas as andorinhas levantaram voo quando  $S_n = 121$ , sendo  $S_n$  a soma de  $n$  termos de  $(v_n)$ , que é uma progressão aritmética (sucessão dos números ímpares 1, 3, 5, 7, ...). Então:

$$\frac{v_1 + v_n}{2} \times n = 121 \Leftrightarrow (1 + 2n - 1) \times n = 121 \times 2 \Leftrightarrow 2n^2 = 121 \times 2 \Leftrightarrow n = \sqrt{121} \Leftrightarrow n = 11$$

( $n > 0$ )

**Resposta:** São necessárias 11 vezes para que todas as andorinhas levantem voo

**6.**

A variável aleatória  $X$  pode tomar os valores 0, 1, ou 2

$$P(X = 0) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} \quad (\text{probabilidade de saírem dois cartões de zonas naturais})$$

$$P(X = 1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{6}{10} \quad (\text{probabilidade de sair um cartão de zona urbana seguido de um de zona natural ou vice-versa})$$

$$P(X = 2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \quad (\text{probabilidade de saírem dois cartões de zonas urbanas})$$

**Outro processo**

Uma tabela de dupla entrada pode representar a experiência, que consiste em retirar ao acaso, sucessivamente e sem reposição, dois desses cinco cartões, registando-se a respetiva probabilidade da espécie de andorinha que figura em cada um dos cartões.

	Urbanas	Naturais
Urbanas	$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$
Naturais	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

Observando a tabela concluímos que:

$$P(X = 0) = \frac{3}{10} \quad ; \quad P(X = 1) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} \quad ; \quad P(X = 2) = \frac{1}{10}$$

**Resposta:** A tabela de distribuição de probabilidade é:

$x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,3	0,6	0,1

7.

Como as andorinhas estão dispostas de forma a corresponderem aos vértices de um hexágono regular podemos afirmar que os ângulos  $B\hat{C}H$  e  $D\hat{C}H$  têm de amplitude  $60^\circ$ . Assim o ângulo concavo em C tem de amplitude  $240^\circ$ . ( $360^\circ - 60^\circ - 60^\circ$ )

A rotação de  $-660^\circ$  inclui  $360^\circ + 300^\circ$ , isto é, uma volta completa mais  $300^\circ$ , no sentido negativo.

Como  $300^\circ = 360^\circ - 60^\circ$  temos por isso:

**Resposta:** O transformado do ponto  $H$  será o ponto  $B$ .

8.

Com base no gráfico de barras da Figura 9, é possível construir a seguinte tabela de frequência absolutas simples:

<u>diâmetro</u>	<u>Frequência absoluta (<math>f_a</math>)</u>
2,00	669
2,30	603
2,80	841
3,30	31
4,30	194
5,25	184
Total	2522

Recorrendo às capacidades da calculadora editamos duas listas, L1 (valores dos diâmetros) e L2, (valores de  $f_a$ ) com todos os dados fornecidos e procuramos de seguida os valores de  $\bar{x}$  e  $s$ , obtendo  $\bar{x} = 2,77$  e  $s = 0,92$ .

Assim, temos que  $]\bar{x} - s; \bar{x} + s[ = ]2,77 - 0,92; 2,77 + 0,92[ = ]1,85; 3,69[$



De um total de 2522 anilhas existem 378 (194+184) cujo diâmetro está fora deste intervalo, ou seja, as anilhas cujos diâmetros medem 4,3 mm e 5,25 mm, respetivamente.

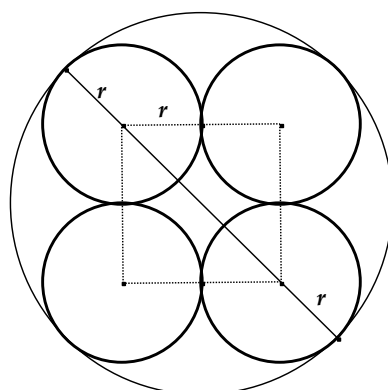
Assim, a percentagem de anilhas utilizadas cujo diâmetro não pertence ao intervalo  $]1,85; 3,69[$  é dada pelo quociente  $\frac{378}{2522} \approx 0,149 \dots$

**Resposta:** Há 15% de anilhas utilizadas cujo diâmetro não pertence ao intervalo  $]1,85; 3,69[$ .

9.

As quatro anilhas dispostas como ilustra a figura do enunciado definem um quadro de lado igual a  $2r$  sendo  $r$  a medida do raio de cada anilha, isto é  $r = 10,5 \div 2 = 5,25$ .

A caixa cilíndrica terá um diâmetro cujo comprimento corresponde à diagonal do quadrado acrescido de  $r + r = 2r$  como mostra o esquema seguinte:



O diâmetro da caixa é então :

$$d = \sqrt{10,5^2 + 10,5^2} + 2 \times 5,25 = \sqrt{220,5} + 10,5 = 14,8492 + 10,5 \approx 25,3492$$

e o seu raio é, aproximadamente,  $R = 25,3492 \div 2 = 12,6746$

Desta forma, a área lateral da caixa é  $A_L = 10,3 \times \frac{2 \times \pi \times R}{\text{perímetro da caixa}} \approx 10,3 \times 2 \times \pi \times 12,6746 \approx 820,2597$

A base da caixa tem de área  $A_B = \pi \times R^2 = \pi \times 12,6746^2 \approx 504,6827$

A área total de papel autocolante é  $A_L + A_B = 820,2597 + 504,6827 \approx 1324,9424 \text{ mm}^2$

**Resposta:** A área total de papel autocolante corresponde a  $13,2 \text{ cm}^2$

**FIM**