Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 2ª FASE – 6 DE SETEMBRO 2021

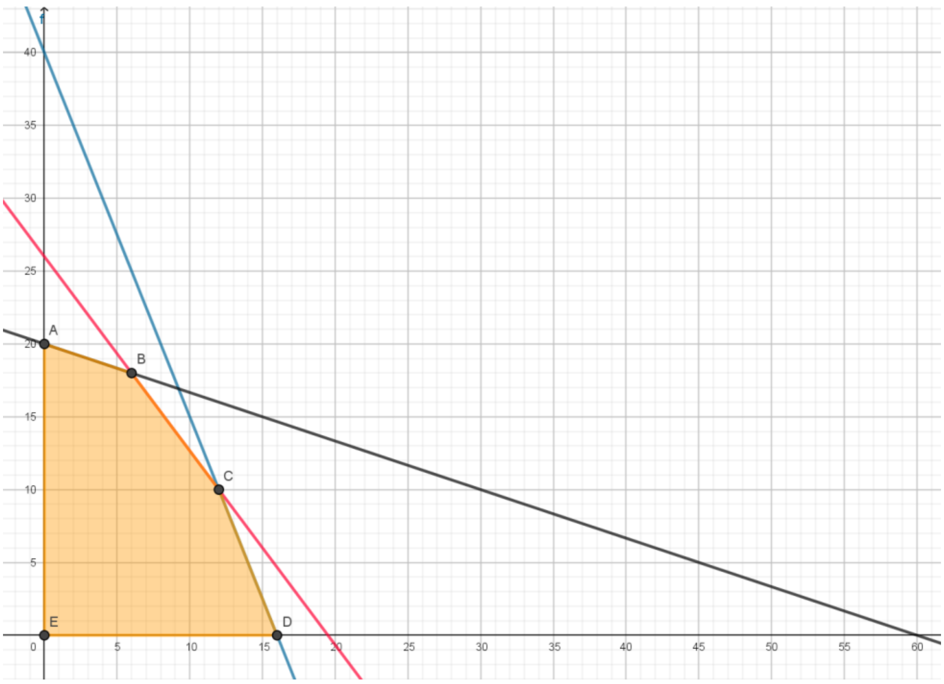
1.

A função objetivo que pretendemos maximizar é : $L(x,y)=180x+160y$, onde x é o número de lotes A e y é o número de lotes B .

De acordo com as condições colocadas temos as seguintes restrições do problema:

$$\begin{cases} 40x+16y\le 640 \\ 4x+12y\le 240 \\ 20x+15y\le 390 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+2y\le 80 \\ x+3y\le 60 \\ 4x+3y\le 78 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\le -\dfrac{5x}{2}+40 \\ y\le -\dfrac{x}{3}+20 \\ y\le -\dfrac{4x}{3}+26 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

Utilizando a tecnologia gráfica construímos a região admissível e identificamos as coordenadas dos pontos que são vértices relevantes para a obtenção da solução:



As coordenadas dos pontos são: $A(0,20)$, $B(6,18)$, $C(12,10)$ e $D(16,0)$

Averiguamos agora qual a solução ótima:

x	y	$L(x,y)=180x+160y$
0	20	$180\times0+160\times20=3200$
6	18	$180\times6+160\times18=3960$ → **solução ótima**
12	10	$180\times12+160\times10=3760$
16	0	$180\times16+160\times0=2880$

Resposta: Devem-se vender 6 lotes do tipo A e 18 lotes do tipo B.

2.

2.1. Temos que calcular $C(2)-C(1)$

$$C(2)-C(1)=42\left(1-e^{-0,1056\times2-0,4222}\right)-42\left(1-e^{-0,1056-0,4222}\right)\approx19,707-17,224\approx2,483\approx2,5$$

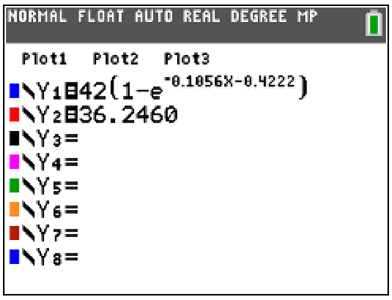
Resposta: Durante o segundo ano de vida, um carapau cresce, aproximadamente, 2,5 cm

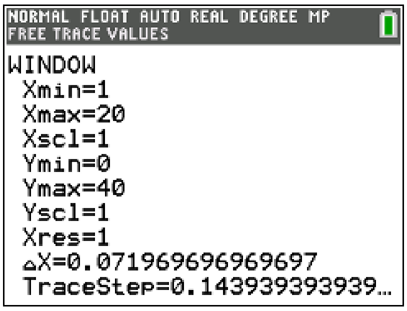
2.2. Com 400 gramas de massa, um carapau terá um comprimento tal que $M(C)=400$

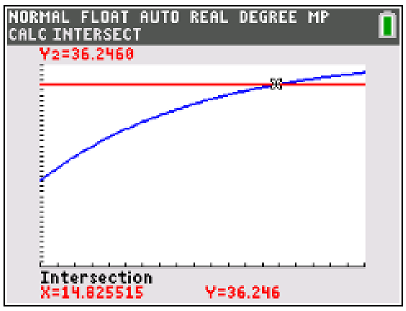
$$M(C)=400 \quad\Leftrightarrow\quad 0,0084\times C^3=400 \quad\Leftrightarrow\quad C=\sqrt[3]{\frac{400}{0,0084}} \quad\Leftrightarrow\quad C\approx36,2460$$

Para determinar a idade desse carapau temos que resolver a equação $C(t)=36,2460$

Usemos a tecnologia gráfica para resolver esta equação:







A idade do carapau é, aproximadamente, $14,8255$ anos.

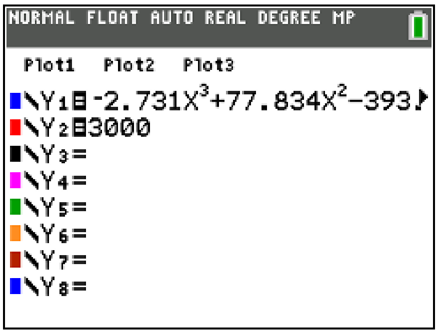
$0,8255\times12=9,906\approx10$

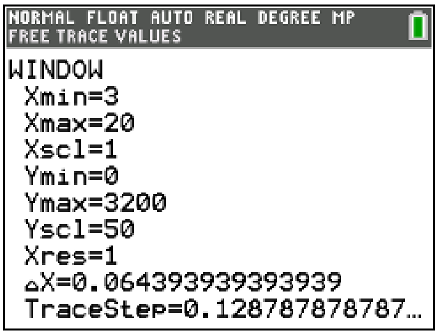
Resposta: A idade de um carapau com 400g é, aproximadamente, 14 anos e 10 meses.

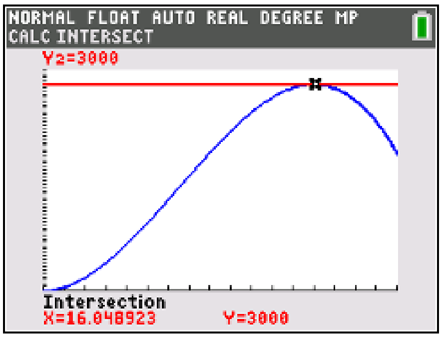
3.

3.1. Para determinarmos o valor de N temos que resolver a equação $P(v)=3000$, com $v>15$

Usemos a tecnologia gráfica para resolver esta equação:







Resposta: O valor de N é, aproximadamente, 16 m/s .

3.2. A taxa pedida é dada por $t.v.m._{[5,15]}=\dfrac{P(15)-P(5)}{15-5}\approx\dfrac{2949,59-191,18}{10}\approx 275,84\approx 276$

Resposta: A taxa de variação média é de 276 kW / m/s . O que significa que quando a velocidade do vento varia de 5 para 15 m/s, a potência útil injetada na rede aumenta, em média, 276 kW por m/s.

3.3. Para $v>N$ temos que, de acordo com os dados, $P(v)=3000$, isto é, a função é constante. Então teremos que $T=0$, para $v>N$.

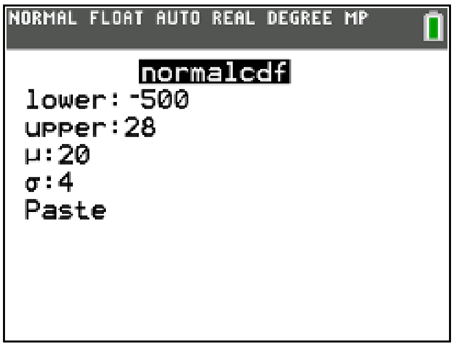
Resposta: $T=0$, para $v>N$, porque a taxa de variação instantânea de uma função constante é sempre nula.

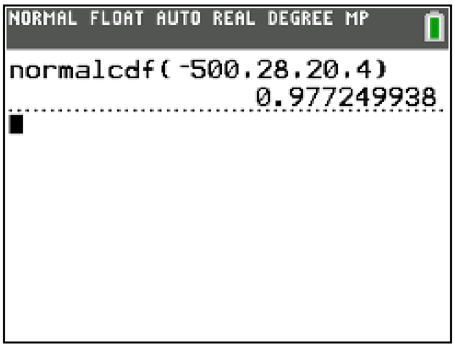
4.

4.1. Atendendo à hora de saída (8h 32m), para que o autocarro chegue às 9 horas, a viagem da Mariana durará 28 minutos.

A duração da viagem segue uma distribuição normal de parâmetros 20 e 4, isto é, a variável Y segue uma distribuição $N(20,4)$.

Para determinar a probabilidade do autocarro chegar antes das 9 horas, podemos usar a calculadora para determinar $P(Y<28)$, utilizando um limite inferior fictício, muito pequeno, no comando normalcdf do menu de distribuições de probabilidades:





Temos assim que $P(Y<28)\approx 0,98$

Resposta: A probabilidade do autocarro chegar antes da hora prevista é, aproximadamente, 98%.

4.2. Para determinarmos o valor de a, temos primeiro que determinar o valor de b.

Ora, sabemos que a soma das probabilidades tem que ser 1, pelo que

$$0,55+0,25+b=1 \quad \Leftrightarrow \quad b=1-0,80 \quad \Leftrightarrow \quad b=0.20$$

Como o valor médio da variável aleatória é 16,76 temos que ter:

$$0,55\times 14,20+0,25a+0,20\times 20,50=16,76$$

$$\Leftrightarrow \quad 0,25a=16,76-7,81-4,1$$

$$\Leftrightarrow \quad a=\frac{4,85}{0,25} \quad \Leftrightarrow \quad a=19,40$$

Resposta: O preço do bilhete do tipo 2 é 19,40 €

5.

5.1. Existirá algum n de tal modo que $u_n = 100$? Resolvamos então a equação

$$2n + 45 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{100-45}{2} \quad \Leftrightarrow \quad n = 27,5$$ que não é um número natural.

Resposta: Nenhum dos cabos tem 100 metros de comprimento.

5.2. Nos 1000 m de comprimento do tabuleiro podemos estabelecer $1000 \div 25 = 40$ espaços de 25 m. Como as "torres não são cabos", existem então 39 cabos verticais entre o tabuleiro e cada um dos quatro cabos rectilíneos.

Em cada uma das partes temos um comprimento total de cabos que é dado por:

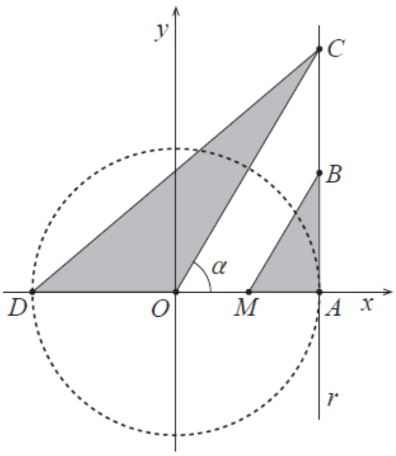
$$S = \frac{u_1 + u_{39}}{2} \times 39 = \frac{2\times 1 + 45 + 2\times 39 + 45}{2} \times 39 = \frac{47+123}{2} \times 39 = 3315$$

Nos quatro cabos teremos $4 \times 3315 = 13260$

Resposta: A totalidade dos cabos verticais mede 13260 metros de comprimento.

6.

6.1. Atendendo às coordenadas do ponto $A(1,0)$ e ao centro da circunferência estamos perante uma "circunferência trigonométrica"; a reta r identifica-se com o "eixo das tangentes".



A área do triângulo $[DOC]$ é dada por $A_1 = \frac{\overline{OD} \times \overline{AC}}{2}$

Como $\overline{OD} = 1$ e $\overline{AC} = tg(\alpha)$, temos que $A_1 = \frac{tg(\alpha)}{2}$

Por outro lado, como $[MB]$ é sempre paralelo a $[OC]$, o ângulo AMB é igual a α e, assim, o triângulo $[AMB]$ é semelhante ao triângulo $[AOC]$ e, por isso, os seus lados são proporcionais.

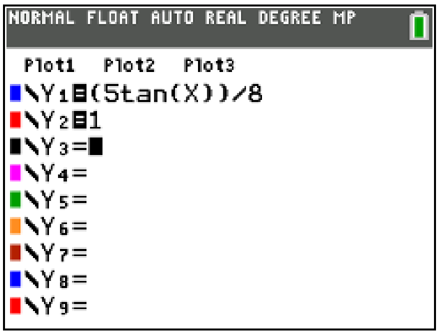
Assim, como $\overline{AM} = \frac{\overline{AO}}{2} = 0,5$, então $\overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{tg(\alpha)}{2}$

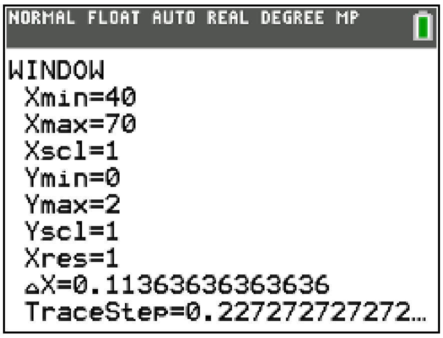
A área do triângulo $[AMB]$ é então dada por $A_2 = \frac{\overline{AM} \times \overline{AB}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{tg(\alpha)}{2}}{2} = \frac{\frac{tg(\alpha)}{4}}{2} = \frac{tg(\alpha)}{8}$

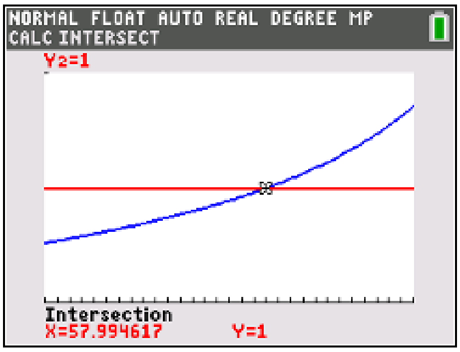
Resposta: A soma T é igual a $A_1 + A_2 = \frac{tg(\alpha)}{2} + \frac{tg(\alpha)}{8} = \frac{4tg(\alpha)}{8} + \frac{tg(\alpha)}{8} = \frac{5tg(\alpha)}{8}$, como se queria mostrar.

6.2. Para respondermos à questão temos que encontrar as soluções inteiras da inequação $T(\alpha) > 1$ com $40^{\text{o}} \leq \alpha \leq 70^{\text{o}}$ e $T(\alpha) = \dfrac{5tg(\alpha)}{8}$

Usemos a calculadora gráfica:







A função T é sempre crescente no seu domíno.

Assim, podemos obter a resposta pretendida.

Resposta: o menor valor inteiro de α para o qual a soma das áreas é superior a 1 é 58^{o} e o maior é 70^{o}.

6.3. Se $\alpha = 45^{\text{o}}$ temos que $\overline{AC} = tg(45^{\text{o}}) = 1$ e, assim, as coordenadas do ponto C são $(1,1)$.

Como $D(-1,0)$ temos que o declive da reta é $m_{DC} = \dfrac{0-1}{-1-1} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$

Então a equação da reta é da forma $y = \dfrac{1}{2}x + b$

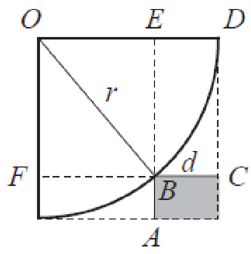
Utilizando o ponto $C(1,1)$ vamos obter o valor de b:

$$1 = \frac{1}{2} \times 1 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 1 - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{1}{2}$$

Logo:

Resposta: A equação reduzida da reta DC é $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

7. Vamos utilizar o esquema da figura 8.



Para determinarmos o volume da vasilha (esfera), temos que determinar o valor de r. Para isso podemos usar o triângulo retângulo $[OFB]$ em que r é a medida da hipotenusa.

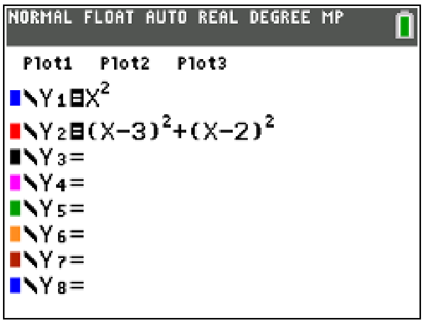
Como $d = \overline{BC} = 3$, então $\overline{FB} = \overline{OD} - \overline{BC} = r - 3$ ([1])

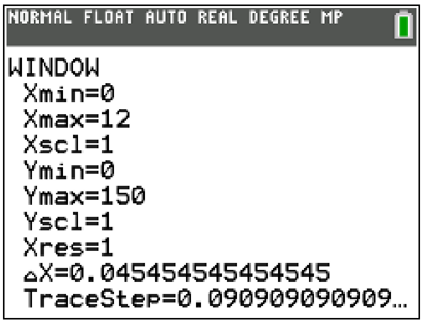
Como $\overline{AB} = 2$, então $\overline{OF} = r - 2$ ([2])

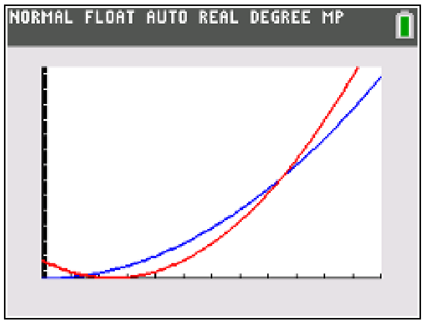
Então podemos afirmar que $r^2 = (r-3)^2 + (r-2)^2$

Podemos resolver esta equação graficamente ou analiticamente.

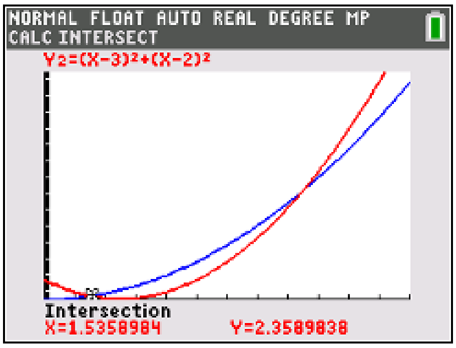
Utilizemos a calculadora gráfica:

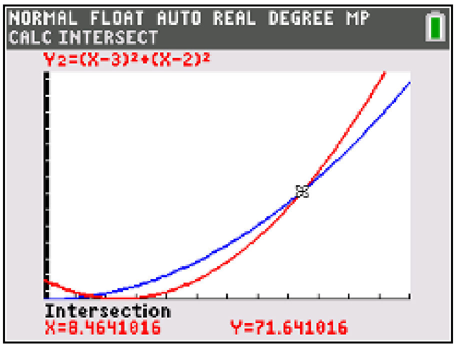






E determinemos, agora, as intersecções dos dois gráficos:





As soluções da equação são assim $r \approx 1,5359 \ \vee \ r \approx 8,4641$, mas no contexto do problema, como $r > d$, temos que ter $r \approx 8,4641$.

Desta forma, o volume da esfera é $V \approx \dfrac{4}{3}\pi \times 8,4641^3 \approx 2539,98$

Assim sendo concluímos que a capacidade da esfera é menor a 2600 dm^3

Resposta: O comandante tinha razão, como se mostrou na resolução.

FIM