Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 1ª FASE – 28 DE JUNHO 2023

1. Seja x o número de embalagens de suplemento I e y o número de embalagens de suplemento II.

A função objetivo, que se pretende minimizar, é $C(x,y) = 2x + 1{,}5y$.

Quanto às restrições, a condição relativa à quantidade de maçã é $0{,}4x + 0{,}6y \geq 140$; relativamente à quantidade de amendoim é $0{,}5x + 0{,}5y \geq 150$ e à quantidade de chocolate é $0{,}6x + 0{,}4y \geq 140$. Quanto ao total de caixas temos que $x + y \leq 350$

Tendo em conta as restrições óbvias $x \geq 0$ e $y \geq 0$ e as mencionadas anteriormente, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 0{,}4x + 0{,}6y \geq 140 \\ 0{,}5x + 0{,}5y \geq 150 \\ 0{,}6x + 0{,}4y \geq 140 \\ x + y \leq 350 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -\dfrac{2x}{3} + \dfrac{700}{3} \\ y \geq -x + 300 \\ y \geq -1{,}5x + 350 \\ y \leq -x + 350 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Desta forma, a representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições é a representada em baixo, em que A, B, C e D são os seus vértices.

Calculando o valor da função objetivo nos vértices da região admissível assinalados pelas suas coordenadas, averiguamos a solução ótima:

$$C(0, 350) = 2\times 0 + 1,5\times 350 = 525$$

$$C(100, 200) = 2\times 100 + 1,5\times 200 = 500$$

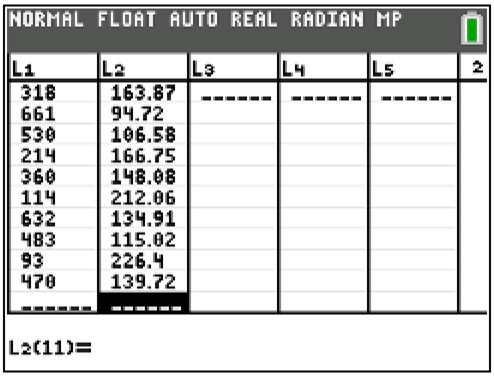
$$C(200, 100) = 2\times 200 + 1,5\times 100 = 550$$

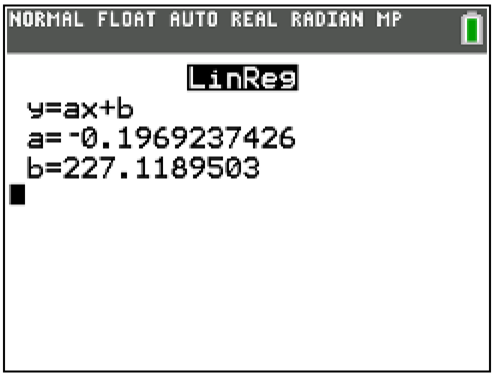
$$C(350, 0) = 2\times 350 + 1,5\times 0 = 700$$

Desta forma, concluímos que o custo mínimo é 500 euros, obtido no ponto *B*.

Resposta: para a empresa ter o custo total mínimo deve produzir 100 embalagens de suplemento I e 200 embalagens de suplemento II.

2. Utilizando as capacidades da calculadora editamos duas listas, digamos L1 referente à variável x, número de maçãs, e L2 referente à variável y, peso médio das maçãs, com vista à obtenção dos parâmetros da reta de regressão linear da forma $y = ax + b$.





Temos assim que a reta de regressão linear, que modela os dados apresentados, tem de equação $y = -0{,}197x + 227{,}119$

Fazendo, neste modelo, $x = 160$, obtemos $y = -0{,}197 \times 160 + 227{,}119 = 195{,}599$

Resposta: É de esperar que o peso médio das maçãs seja de 195,6 gramas.

3.

3.1. De acordo com o padrão de apodrecimento das maçãs apresentado, o número de maçãs que apodrecem em cada dia segue a sequência $1, 3, 5, 7, \ldots$ correspondente à sucessão dos números ímpares, até ao 12º termo. Ora, nesta sucessão, a diferença entre cada termo e o anterior é sempre constante e igual a 2, pelo que o número de maçãs que apodrecem está em progressão aritmética de razão 2.

3.2. Pelas razões apresentadas em 3.1. o termo geral da sequência é $2n-1$, pelo que o seu 12º termo é:

$2 \times 12 - 1 = 23$.

O número total de maçãs que apodrecem é dado por: $\frac{1+23}{2} \times 12 = 12 \times 12 = 144$

Se 144 maças correspondem a 80% das maçãs colhidas, então temos que o total (100%) obedece à relação:

$$\frac{144}{80} = \frac{T}{100} \Leftrightarrow T = \frac{144 \times 100}{80} = 180$$

Resposta: Foram colhidas 180 maçãs.

4.

4.1. Estando as maçãs à temperatura de 25ºC , temos que fazer, no modelo apresentado, $T_0 = 25$.

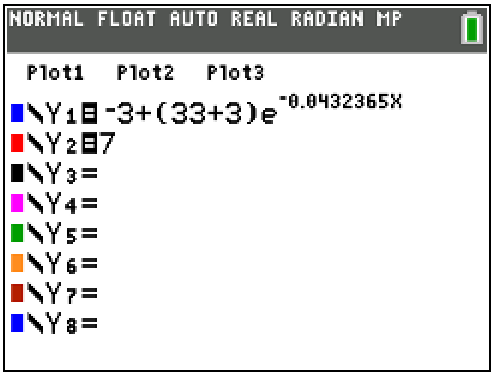
A temperatura após 27 minutos de se iniciar o banho é dada por:

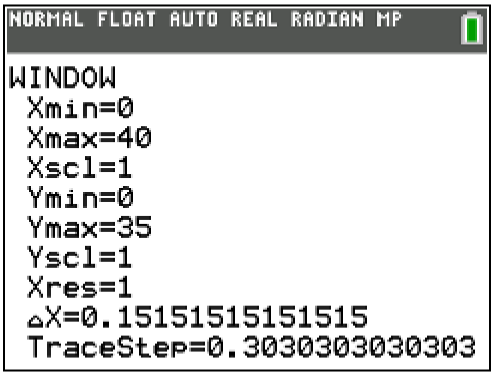
$T(27) = -3 + (25+3)e^{-0,0432365\times 27} = -3 + 28e^{-1,1673855} \approx 5,713$

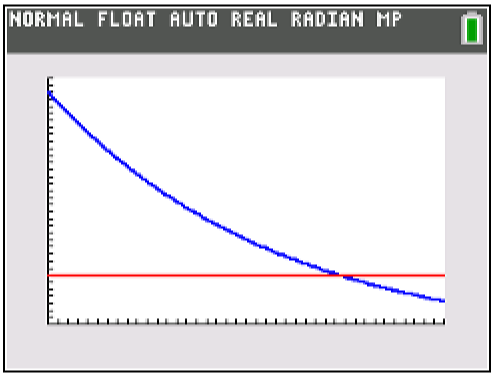
Resposta: Como $5,713 < 7$, as maças estão em condições de ser armazenadas.

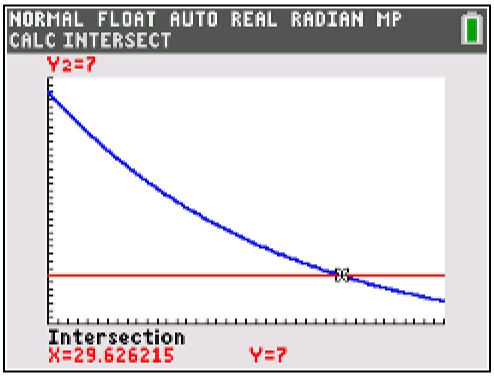
4.2.1. Neste caso temos que $T_0 = 33$ e há que encontrar as soluções da inequação $T(x) < 7$

Podemos encontrar essas soluções recorrendo às capacidades da calculadora gráfica:









A curva correspondente ao gráfico da função T, que é decrescente, interseta a reta de equação $y = 7$ no ponto de abcissa $x \approx 29,626$.

Resposta: A duração mínima do banho de arrefecimento, nesta situação, é de 30 minutos.

4.2.2. Como V é a função que dá a taxa de variação instantânea de T, então $V(16) \approx -0{,}78$, significa que, estando as maçãs a uma temperatura inicial de 33ºC, no 16º minuto de banho de arrefecimento, a temperatura das maçãs está a baixar a uma taxa de, aproximadamente, 0,78ºC por minuto.

5.

Podemos resolver este item, usando a informação que consta no formulário relativamente à distribuição normal.

De $\mu = 60$ e $\sigma = 5$, resulta que $55 = \mu - \sigma$

Como, de acordo com a distribuição normal com estes parâmetros,

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}6827$$

Temos:

$$P(55 < X < 65) = 0{,}6827$$

E também temos que:

$$P(55 < X < 60) = \frac{0{,}6827}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(55 < X < 60) = 0{,}34135$$

Logo,

$$P(X > 55) = P(55 < X < 60) + P(X > 60)$$

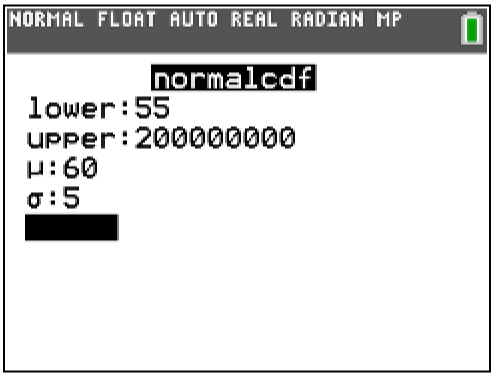
$$\Leftrightarrow P(X > 55) = 0{,}34135 + 0{,}5$$

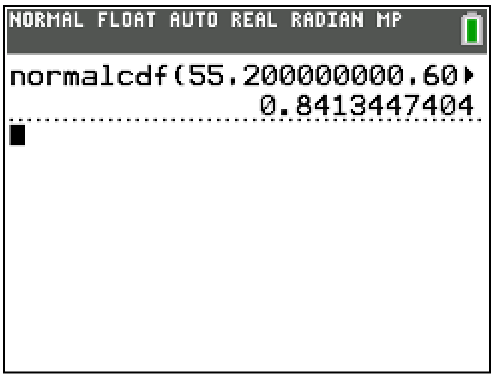
$$\Leftrightarrow P(X > 55) = 0{,}84135$$

Como foram colhidas 50000 maçãs, vem que:

$$0{,}84135 \times 50000 = 42067{,}5$$

Em alternativa, também podíamos recorrer à calculadora para obter o valor de $P(X > 55)$:





Resposta: É esperado serem comercializados 42 milhares de maçã bravo-de-esmolfe.

6.

Este item pode ser resolvido por pelo menos dois processos:

1º processo:

O número de horas sol no dia 1 de janeiro é dado por:

$S(1) = 12{,}1237 + 2{,}8720\sin(0{,}0168 \times 1 - 1{,}3255)$

$\Leftrightarrow S(1) \approx 9{,}34978$

Determinemos os minutos de sol para além das 9 horas: $0{,}34978 \times 60 \approx 20{,}9867$

No dia 1 de janeiro houve, então, aproximadamente, 9h 21min de sol.

Como o nascer do sol se deu às 7h 56min temos, assim, $7h\ 56min + 9h\ 21min = 17h\ 17min$, pelo que, nesse dia o pôr do sol foi às $17h\ 17min$

Ora, $17h\ 17min - 15h = 2h\ 17min$

Como o Sr. Silva esteve no pomar desde as 15 horas até ao pôr do sol, então esteve no pomar, aproximadamente, 2horas e 17 minutos.

2º processo:

O nascer do sol deu-se às 7h 56min.

Ora, $15h - 7h\ 56min = 7h\ 4min$

O Sr. Silva **não esteve** no pomar durante 7 horas e 4 minutos de sol.

Como já vimos, temos que:

$S(1) \approx 9h\ 21min$ e $9h\ 21min - 7h\ 4min = 2h\ 17min$

Resposta: O Sr. Silva esteve no pomar, aproximadamente, 2horas e 17 minutos.

7.

Comecemos por determinar o peso médio das maçãs, em gramas.

$$\bar{x} = \frac{181 + 185 + 188 + 190 + 192}{5} \Leftrightarrow \bar{x} = 187{,}2$$

Basta agora determinar, no modelo apresentado, o valor de $P(187{,}2)$:

$$P(187{,}2) = 1{,}059\ln(187{,}2) - 3{,}2553$$
$$\Leftrightarrow P(187{,}2) \approx 2{,}28558$$

Resposta: O preço por quilograma das maçãs que a avó Maria comprou foi de aproximadamente 2,29€.

8.

O gráfico A não pode representar a função h porque, no início da contagem de tempo, não havia água no depósito, pelo que o gráfico devia conter necessariamente a origem do referencial.

Para além disso, notemos que à medida que o depósito vai enchendo a altura da água vai subindo, pelo que a função h será uma função crescente, que não corresponde ao gráfico A.

O gráfico B não pode representar a função h porque a torneira tem um caudal constante e à medida que o depósito vai enchendo, o diâmetro da superfície da água permanece constante, pelo que a função h será uma função de proporcionalidade direta, sendo o seu gráfico parte de uma semirreta com origem na origem do referencial.

9.

9.1. A capacidade da forma do bolo, que é um tronco de cone, será dada pela diferença de volume dos dois cones representados esquematicamente na figura 6. A capacidade é pedida em litros.

Como $1l = 1dm^3$, vamos já utilizar as medidas em dm.

As dimensões do cone de diâmetro $[AB]$ são:

- Raio = $1{,}1dm$
- Altura = $5{,}5dm$

Os dois cones, de diâmetro $[AB]$ e de diâmetro $[CD]$, são semelhantes, pelo que se verifica que:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{4{,}5}{5{,}5} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{2{,}2 \times 4{,}5}{5{,}5} \Leftrightarrow \overline{CD} = 1{,}8$$

As dimensões do cone de diâmetro $[CD]$ são, então:

- Raio $= 0{,}9dm$
- Altura $= 4{,}5dm$

Volume do cone de diâmetro $[AB]$:

$$V_1 = \frac{1{,}1^2 \times \pi}{3} \times 5{,}5 \Leftrightarrow V_1 \approx 6{,}9691$$

Volume do cone de diâmetro $[CD]$:

$$V_2 = \frac{0{,}9^2 \times \pi}{3} \times 4{,}5 \Leftrightarrow V_2 \approx 3{,}81704$$

O volume do tronco de cone corresponde à diferença dos dois volumes que acabamos de determinar:

$V_T = V_1 - V_2 \approx 6{,}9691 - 3{,}81704 \approx 3{,}15206$ dm^3

Resposta: A forma tem uma capacidade de, aproximadamente, 3 litros.

9.2. As coordenadas dos pontos V e M, são do tipo $(5, y, 4)$.

Como $y_M = 21$, as coordenadas do ponto M, são $(5, 21, 4)$.

Notemos que o comprimento $\overline{VM} = 55$ porque corresponde à altura, em cm, do cone de diâmetro $[AB]$.

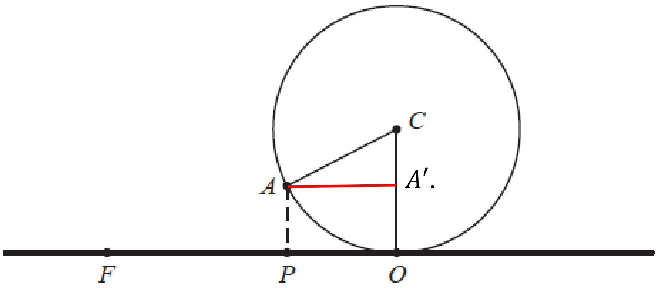
Assim, temos de ter:

$$y_M - y_V = 55$$
$$\Leftrightarrow 21 - 55 = y_V$$
$$\Leftrightarrow -34 = y_V$$

Resposta: As coordenadas do ponto V, são $(5, -34, 4)$.

10.

A distância $\overline{FP}$ é dada pela diferença entre $\overline{FO}$ e $\overline{PO}$. Temos que $\overline{PO} = \overline{AA'}$ sendo que o triângulo $[ACA']$ é retângulo em A'.



Comecemos por determinar o ângulo $\alpha = A\hat{C}O$ que é o ângulo ao centro correspondente ao arco AO que mede 3,77 cm.

O raio da circunferência é $\overline{AC} = \frac{7{,}2}{2} = 3{,}6$

Temos então, em radianos, que:

$$3{,}77 = \alpha \times 3{,}6 \iff \alpha = \frac{3{,}77}{3{,}6}$$
$$\Leftrightarrow \alpha \approx 1{,}03\, rad$$

Sendo assim, vem: $\sin \alpha = \frac{\overline{AA\prime}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AA'} = \overline{AC} \times \sin \alpha$

$$\overline{AA'} = 3{,}6 \times \sin 1{,}03 \approx 3{,}09$$

Concluímos então que $\overline{OP} \approx 3{,}09$

Logo $\overline{FP} = \overline{FO} - \overline{PO} = 40 - 3{,}09 \approx 37$

Resposta: A formiga encontra-se a 37 cm do formigueiro.

FIM