Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

# PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO
# (CÓDIGO DA PROVA 735) – 2ª FASE – 24 DE JULHO 2023

**1.** Seja $x$ o número de quilogramas de concentrado do tipo I e $y$ o número de quilogramas de concentrado do tipo II.

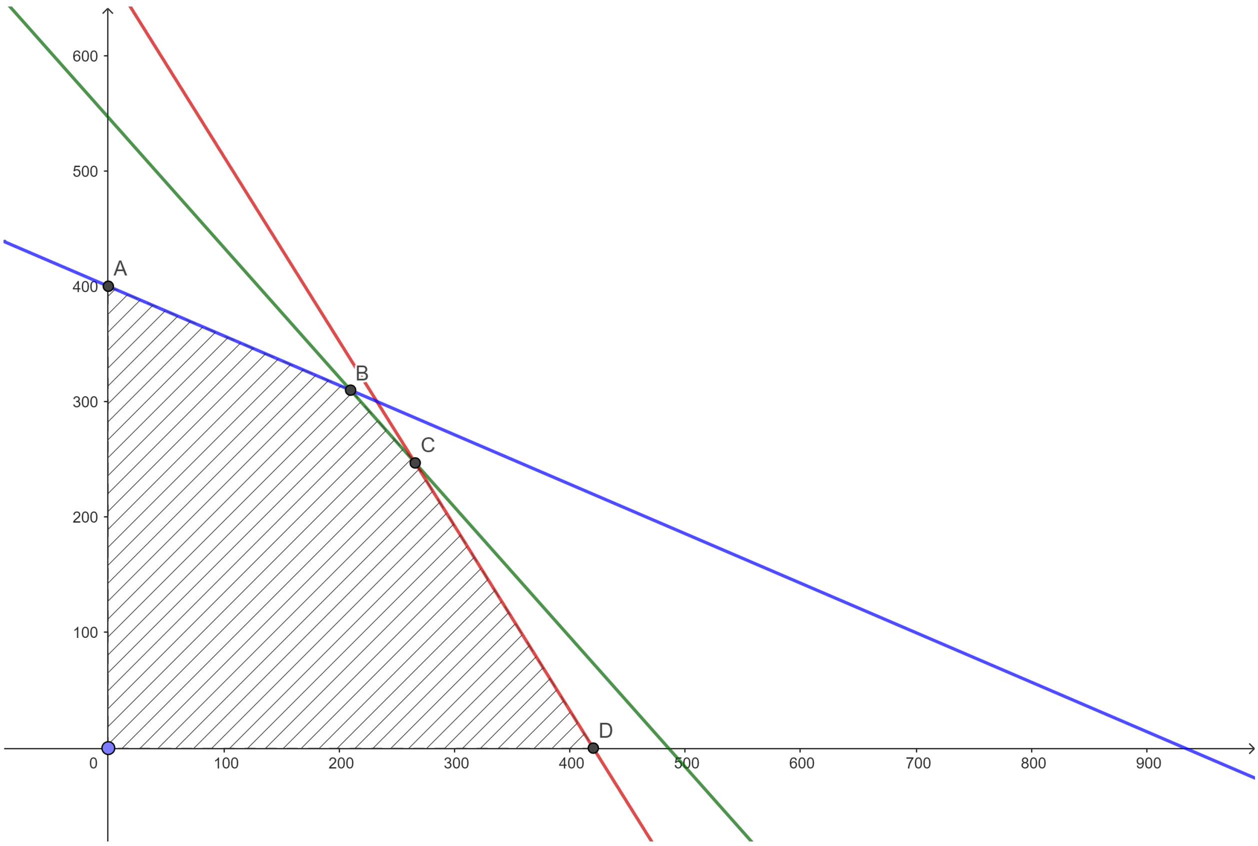
A função objetivo, que se pretende maximizar, é $R(x,y) = 2{,}5x + 3y$ .

Quanto às restrições, a condição relativa à quantidade de maçã é $0,45x + 0,4y \leq 218,5$; relativamente à quantidade de pera é $0,4x + 0,25y \leq 168,15$ e à quantidade de romã é $0,15x + 0,35y \leq 140$ .

Tendo ainda em conta as restrições óbvias $x \geq 0 \; e \; y \geq 0$ , obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 0,45x + 0,4y \leq 218,5 \\ 0,4x + 0,25y \leq 168,15 \\ 0,15x + 0,35y \leq 140 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \dfrac{-0,45x + 218,5}{0,4} \\ y \leq \dfrac{-0,4x + 168,15}{0,25} \\ y \leq \dfrac{-0,15x + 140}{0,35} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Desta forma, a representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições é a representada em baixo, em que $A$ , $B$ , $C$ e $D$ são os seus vértices.




As coordenadas dos vértices obtém-se por interseção das retas que definem a região admissível e, excetuando a origem do referencial: são: $A(0, 400)$, $B(210, 310)$, $C(266, 247)$ e $D(420{,}375; 0)$

Calculando o valor da função objetivo nos vértices da região admissível assinalados pelas suas coordenadas, averiguamos a solução ótima:

$$R(0, 400) = 2{,}5 \times 0 + 3 \times 400 = 1200$$

$$R(210, 310) = 2{,}5 \times 210 + 3 \times 310 = 1455$$

$$R(266, 247) = 2{,}5 \times 266 + 3 \times 247 = 1406$$

$$R(420{,}375; 0) = 2{,}5 \times 420{,}375 + 3 \times 0 = 1050{,}94$$

Desta forma, concluímos que o valor de vendas máximo é de 1455 euros, obtido no ponto *B*.

**Resposta:** para a empresa ter o valor de vendas total máximo deve produzir 210 Kg de concentrado do tipo I e 310 Kg de tipo II.

**2.** A probabilidade do jardim não ser regado é dada por: $P(X=0)$.

Ora, temos que:

$$\begin{aligned} P(X=0) &= 1-P(X\geq 1) \\ &= 1-(0,01+0,02+0,05+0,09+0,41+0,21+0,21) \\ &= 1-1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

**Resposta:** A probabilidade do Sr. Ferreira não regar o jardim é zero.

**3.**

**3.1.** De acordo com o padrão de escrita das letras, observamos que o número de círculos preenchidos por cada letra segue a sequência $2, 4, 6, 8, \ldots$ correspondente à sucessão dos números pares.

O termo geral desta sucessão é $l(n)=2n$

Então com a 15ª letra do alfabeto serão preenchidos $2\times 15=30$

**Resposta:** Serão assinalados 30 círculos.

**3.2.** A sucessão dos números pares é uma progressão aritmética de razão 2.

Sabemos que o total de círculos assinalados é 72. Então, usando a expressão para a soma de $n$ termos de uma progressão aritmética onde desconhecemos o n-ésimo termo, temos:

$$\begin{aligned} \frac{2+2n}{2}\times n=72 &\Leftrightarrow (1+n)\times n=72 \\ &\Leftrightarrow n+n^2=72 \\ &\Leftrightarrow n^2+n-72=0 \\ &\Leftrightarrow n=-9 \ \vee \ n=8 \end{aligned}$$

Atendendo a que $n$ é um número natural temos que $n=8$, o que significa que a letra escrita no último círculo foi a 8ª letra do alfabeto.

**Resposta:** A letra escrita foi a H.

**4.**

**4.1.** O crescimento no primeiro ano é dado por $h(1)-h(0)$.

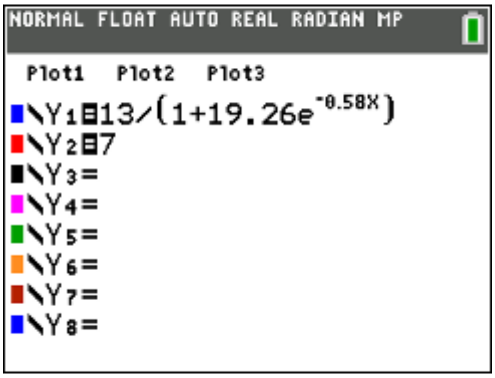
$$h(0)=\frac{13}{1+19,26\,e^{-0,58\times 0}}=\frac{13}{20,26}\approx 0,642$$

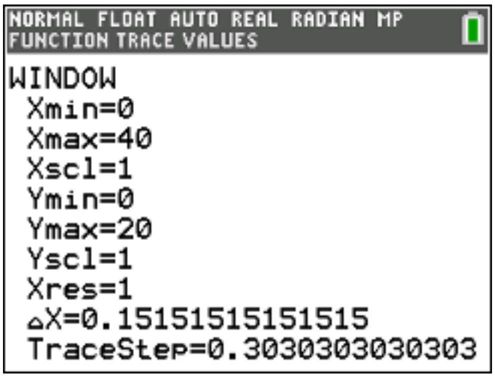
$$h(1)=\frac{13}{1+19,26\,e^{-0,58\times 1}}=\frac{13}{1+19,26\,e^{-0,58}}\approx 1,103$$

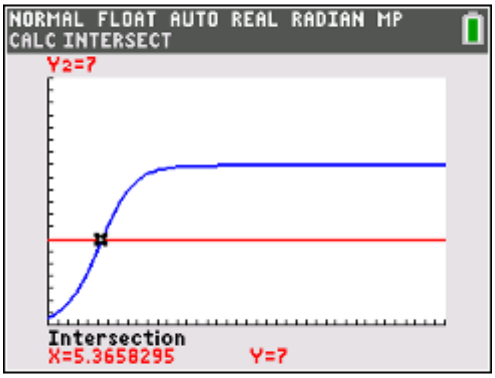
$$h(1)-h(0)\approx 1,103-0,642\approx 0,461 \text{ metros}$$

**Resposta:** No primeiro ano a árvore cresceu, aproximadamente, 46 cm.

**4.2.** Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, esboçamos o gráfico da função $h$ e da reta $y=7$ com vista à resolução da equação $h(t)=7$




A curva correspondente ao gráfico da função $h$, que é crescente, interseta a reta de equação $y=7$ no ponto de abcissa $x\approx 5,3658$.

Isso corresponde a $5+0,3658$ anos.

$0,3658\times 12=4,416\approx 4$ meses

**Resposta:** A árvore ultrapassa os 7 metros de altura no decurso do quinto mês após 5 anos de ter sido plantada.

**4.3.** A função é um modelo logístico que admite uma assintota horizontal de equação $y = 13$. Isso significa que a altura da árvore vai crescendo e aproximando-se de 13 metros sem nunca alcançar essa altura. Desta forma nunca atingirá os 13,5 metros.

**5.** O gráfico refere-se à produção acumulada de batata. Então, no ano de 2021, foram produzidas um total de $49566 - 38972 = 10594$ toneladas.

Como se prevê uma redução de $15\%$ na produção, só serão produzidas $85\%$ das batatas de $2021$.

Ora, $0,85 \times 10594 = 9004,9$ toneladas $\approx 9$ milhares de toneladas

**Resposta:** É previsto para 2022 uma produção de, aproximadamente, 9 milhares de toneladas de batata.

**6.**

**6.1.** A função $f$ é crescente, mas cresce mais rapidamente à medida que $t$ se aproxima de $6$ do que para valores iniciais, mais pertos de zero. Qualquer reta tangente à curva da função tem um declive que vai aumentado à medida que $t$ se aproxima de $6$.

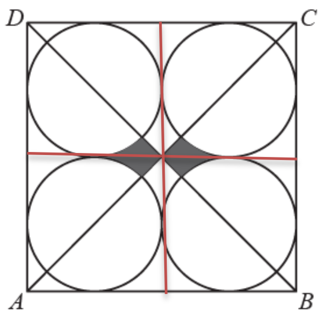
Assim sendo, a taxa de variação instantânea de $f$ é maior em $t = 5,5$ do que em $t = 0,5$

**6.2.** O depósito A não pode ser o existente, porque o seu enchimento seria mais lento na parte final e mais rápido no início, que é exatamente o contrário do que se verifica na função $f$.

O depósito B não pode ser o existente, porque o seu enchimento se daria sempre da mesma forma, o que se traduziria por uma função cujo gráfico fosse retilíneo, o que também não se verifica com a função $f$

**7.**

**7.1.** O lado do quadrado $[ABCD]$ mede $40\ cm$, correspondente a dois diâmetros de uma circunferência.




$A_{[ABCD]} = 40^2$

$\Leftrightarrow A_{[ABCD]} = 1600$

A área de cada círculo é $100\pi\ cm^2$

A diferença entre a área do quadrado $[ABCD]$ e a área de quatro círculos é $1600 - 400\pi$.

Observando atentamente a figura, com o esquema introduzido, verifica-se que esta diferença corresponde à área de dezasseis regiões com área igual a cada uma das duas que estão sombreadas.

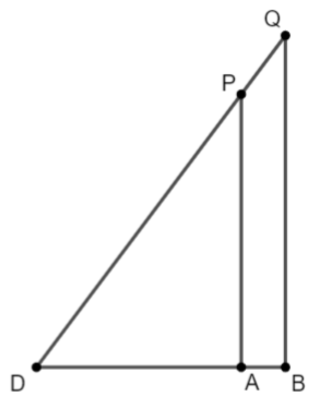
Assim, a área total sombreada é dada por:

$$A_T = \frac{1600 - 400\pi}{16} \times 2$$

$$\Leftrightarrow A_{[ABCD]} \approx 43$$

**Resposta:** A área sombreada é, aproximadamente, 43 cm$^2$.

**7.2**. Analisemos os seguintes triângulos retângulos, semelhantes entre si, onde D é coincidente com a origem do referencial:




Das coordenadas do ponto $P$ resulta

$$\overline{AP} = 40$$

$$\overline{DA} = 30$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $[APD]$, temos

$$\overline{DP} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$$

Como $[PQ]$ corresponde ao raio de uma circunferência da figura 7, temos:

$\overline{PQ} = 10$ e, portanto,

$$\overline{DQ} = 60$$

Por semelhança de triângulos temos

$$\frac{\overline{BD}}{30} = \frac{60}{50}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD} = 36$$

$$\frac{\overline{BQ}}{40} = \frac{60}{50}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BQ} = 48$$

**Resposta:** As coordenadas do ponto $Q$ são $(36{,}48)$.

**8.**

**8.1.** A diferença entre o máximo e o mínimo da função $a(t)$ dá-nos o diâmetro da roda pequena. Podemos determinar o máximo e o mínimo por dois processos:

**1º processo:** Utilizando um processo de construção por enquadramento, temos:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{25\pi}{16}t\right) \leq 1$$

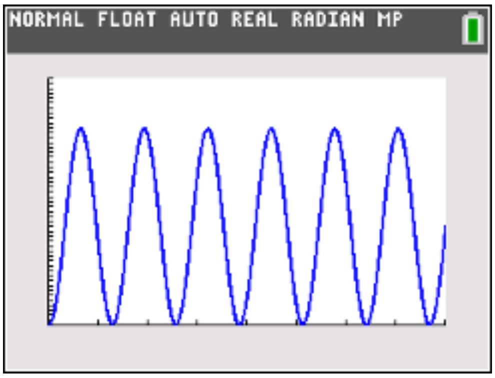
$$\Leftrightarrow -20 \leq -20\cos\left(\frac{25\pi}{16}t\right) \leq 20$$

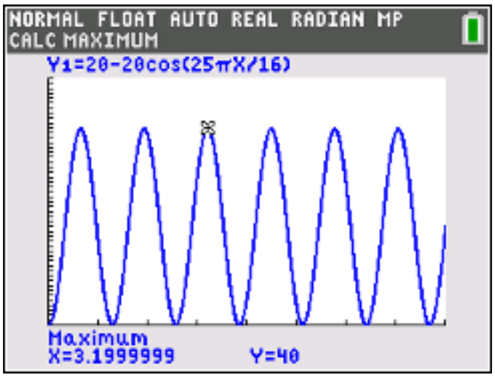
$$\Leftrightarrow 0 \leq 20 - 20\cos\left(\frac{25\pi}{16}t\right) \leq 40$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \mathrm{a}(t) \leq 40$$

**2º processo:** Utilizando a calculadora gráfica, determinamos o máximo da função, uma vez que o mínimo é, trivialmente, igual a 0, porque corresponde à altura do ponto $A$ quando este se encontra no solo.

A função é periódica e podemos obter o seu máximo:




Como a função $a$ varia entre 0 e 40, concluímos que o diâmetro da roda é $40\ cm$, pelo que o raio é $20\ cm$, como se queria demonstrar (c. q. d.).

**8.2.** Vejamos as posições dos pontos $A$ e $B$, ao fim de 8 segundos:

$$\mathrm{a}(8) = 20 - 20\cos\left(\frac{25\pi}{16} \times 8\right)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{a}(8) = 20 - 20\cos\left(\frac{25\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{a}(8) = 20 - 20\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{a}(8) = 20 - 0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{a}(8) = 20$$

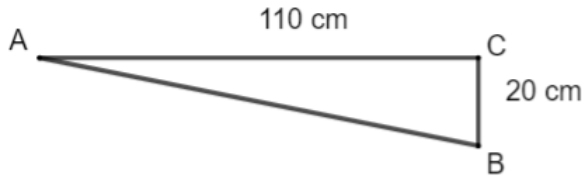
$$b(8) = 62{,}5 - 62{,}5cos\left(\frac{\pi}{2} \times 8\right)$$

$$\Leftrightarrow b(8) = 62{,}5 - 62{,}5cos(4\pi)$$

$$\Leftrightarrow b(8) = 62{,}5 - 62{,}5 \times 1$$

$$\Leftrightarrow b(8) = 0$$

Ao fim de 8 segundos, o ponto $A$ está a 20 cm de altura e à esquerda do centro da roda porque, para a bicicleta avançar, a roda gira no sentido dos ponteiros do relógio. O ponto $B$ volta a estar no solo. Logo, os pontos $A$ e $B$, são a hipotenusa de um triângulo retângulo com as dimensões, que constam da seguinte imagem, sendo a reta $AC$ uma reta paralela ao chão, que contem o centro da roda menor.




Reparemos que, como o raio da roda é 20 cm e o ponto $A$ está a 20 cm de altura, vamos ter que
$\overline{AC} = 20 + 90 = 110$

Recorrendo ao teorema de Pitágoras, temos sucessivamente

$$\overline{AB}^2 = 110^2 + 20^2$$
$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 12500$$
$$\Leftrightarrow \overline{AB} \approx 112$$

**Resposta:** A distância entre os pontos $A$ e $B$, ao fim de 8 segundos é, aproximadamente, 112 cm.

**FIM**