Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 735) – 1ª FASE – 26 DE JUNHO 2024

1. Considerando x o número de embalagens do molho A e y o número de embalagens do molho B a produzir pela empresa.

Do enunciado retiramos que:

– Molho A necessita de 2 litros de mel, de 1 litro de vinagre e de 1 litro de molho de soja.

– Molho B necessita de 1 litro de mel, de 2 litros de vinagre e de 1 litro de molho de soja.

A empresa tem disponíveis 24 litros de mel de onde resulta que $2x + y \leqslant 24$; e dispõe também de 24 litros de vinagre o que faz com que $x + 2y \leqslant 24$.

Se na produção dos dois tipos de molhos devem ser utilizados, pelo menos, 14 litros de molho de soja então $x + y \geq 14$.

Como $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, porque estamos a falar em números de embalagens.

Temos então as correspondências:

$$\text{I} \longrightarrow \leq;$$
$$\text{II} \longrightarrow \leq;$$
$$\text{III} \longrightarrow \geq.$$

2. Relativamente à vespa-asiática sabemos que, no início do dia 1 de janeiro de 2017, a presença desta espécie foi detetada, pela primeira vez, numa região com $57\,000 \text{ Km}^2$ de área.

Dado que a percentagem, P, desta área, afetada pela presença da vespa-asiática, x anos após o dia 1 de janeiro de 2017, é bem modelada por $P(x) = \frac{86{,}8}{1+9{,}85e^{-0{,}5x}}$, com $x \geqslant 0$.

A percentagem daquela área, afetada pela presença da vespa-asiática, no início do dia 1 de janeiro de 2017, era de $P(0) = \frac{86{,}8}{1+9{,}85e^{0}} = \frac{86{,}8}{1+9{,}85} = \frac{86{,}8}{10{,}85} = 8$, ou seja, $P(0) = 8\%$.

Com o passar do tempo, a área afetada tende para 86,8 %, porque $\lim\limits_{x \to +\infty} = \frac{86{,}8}{1+9{,}85e^{-0{,}5\times(+\infty)}} = \frac{86{,}8}{1+9{,}85e^{-\infty}} =$

$= \frac{86{,}8}{1+0} = \frac{86{,}8}{1} = 86{,}8$.

A que corresponde uma área de $0{,}868 \times 57\,000 = 49476 \text{ Km}^2$

No dia 1 de janeiro de 2024, isto é, passados 7 anos, a percentagem daquela área, afetada pela presença da vespa-asiática, era $P(7) = \frac{86{,}8}{1+9{,}85e^{-0{,}5\times 7}} = \frac{86{,}8}{1+0{,}297} \approx 66{,}92$, isto é, superior a 50%.

Temos então as correspondências:

$$\mathrm{I} \longrightarrow a;$$

$$\mathrm{II} \longrightarrow c;$$

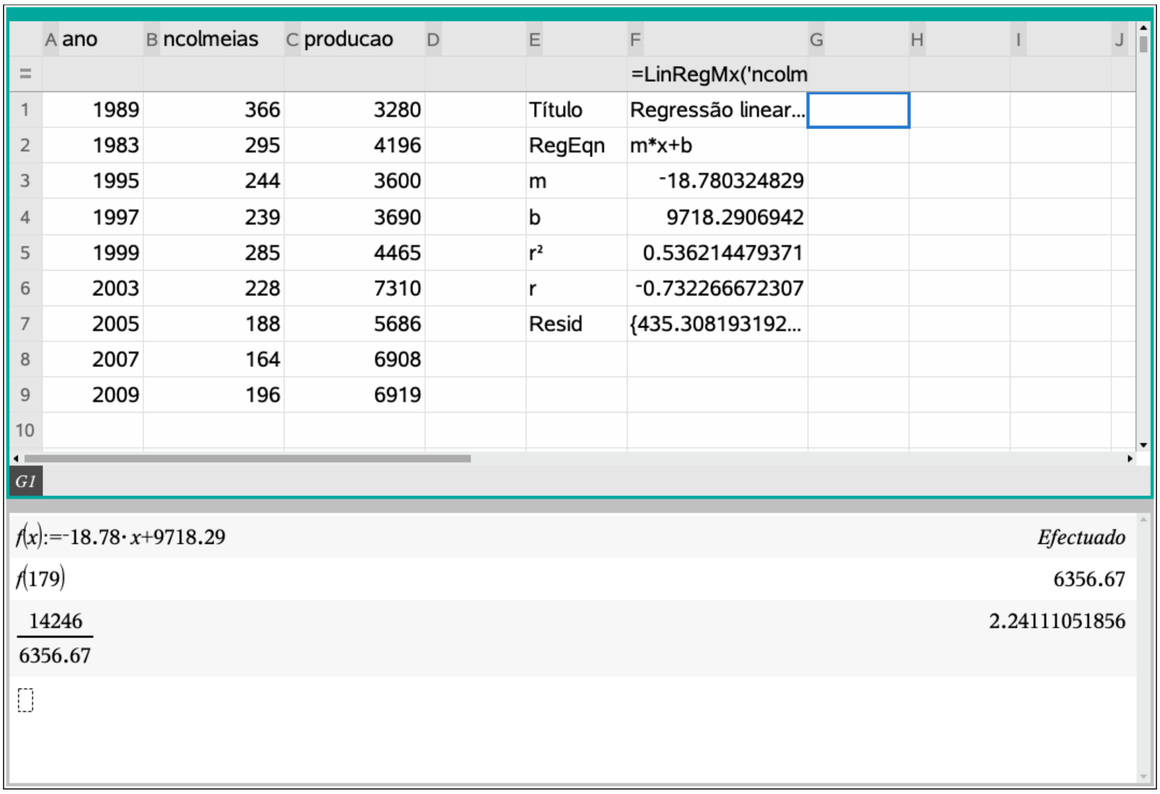
$$\mathrm{III} \longrightarrow b.$$

3. Dois exemplos de resposta:

(i) $V(4) = -0{,}5$, significa que 4 segundos após o início do voo, a distância da abelha à entrada da colmeia estava a diminuir à taxa de 0,5 m/s;

(ii) $V(4) = -0{,}5$, significa que 4 segundos após o início do voo, a abelha está a aproximar-se da entrada da colmeia à velocidade de 0,5 m/s.

4. Considerando os dados da tabela, obteve-se um modelo de regressão linear, de y sobre x, em que x representa o número de colmeias e cortiços povoados, em milhares, e y representa a produção de mel, em toneladas. Essa regressão foi introduzida na calculadora como $f(x) = -18{,}78x + 9718{,}29$



	A ano	B ncolmeias	C producao	D	E	F	G
=						=LinRegMx('ncolm	
1	1989	366	3280		Título	Regressão linear...	
2	1983	295	4196		RegEqn	m*x+b	
3	1995	244	3600		m	-18.780324829	
4	1997	239	3690		b	9718.2906942	
5	1999	285	4465		r²	0.536214479371	
6	2003	228	7310		r	-0.732266672307	
7	2005	188	5686		Resid	{435.308193192...	
8	2007	164	6908				
9	2009	196	6919				
10							

Como em 2016 foram contabilizados 179 milhares de colmeias então temos de considerar $x = 179$ e determinar valor estimado pelo modelo de regressão linear calculado $f(179) \approx 6356{,}67$. Determinando o quociente entre o valor real 14 246 toneladas e o valor estimado 63 56,67 verificamos que $\frac{14246}{6356{,}67} \approx 2{,}24$, logo podemos concluir que a afirmação é verdadeira.

5.

5.1. O segmento de reta $[AB]$ é formado pelo equivalente a 3 bases menores e 2 bases maiores de um trapézio, ou seja, pelo equivalente a 7 bases menores de um trapézio.

$$6{,}3 \div 7 = 0{,}9$$

A base menor do trapézio mede 0,9 m.

A base menor do trapézio corresponde a um lado do hexágono.

Um hexágono regular pode ser dividido em 6 triângulos regulares.

Determinemos a área de um triângulo equilátero de lado 0,9 m.

Comecemos por determinar a altura de cada triângulo.

$$0{,}9^2 = x^2 + 0{,}45^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 0{,}9^2 - 0{,}45^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 0{,}6075$$
$$\Leftrightarrow x \approx 0{,}779$$

$$A_{triângulo} \approx \frac{0{,}9 * 0{,}779}{2}$$
$$\Leftrightarrow A_t \approx 0{,}351$$

A base do sólido é composta por seis hexágonos e dois trapézios, o que corresponde à área de quarenta e dois triângulos.

$$6 \times 6 + 2 \times 3 = 42$$

$$A_{base} = 42 \times A_{triângulo}$$
$$A_b \approx 42 \times 0{,}351$$
$$\Leftrightarrow A_b \approx 14{,}731$$

$$V = A_{base} \times altura$$
$$V \approx 14{,}731 \times 2{,}5$$
$$\Leftrightarrow V \approx 36{,}828$$

R: O sólido tem aproximadamente 37m^3 de volume.

5.2.

Um plano paralelo às bases do prisma, que contenha o ponto médio do segmento de reta $[OA]$, decompõe o prisma em dois sólidos geometricamente iguais.

As bases que contêm os pontos O e A estão contidas, respetivamente, nos planos $x = 0$ e $x = 2{,}5$, pelo que o plano pretendido será $x = 1{,}25$

R: (C)

6.

6.1.

Sendo 300 ml o valor médio do volume, temos

$P(X < 300) = 0{,}5$

Sendo 295 e 305 equidistantes de 300, temos

$P(295 < X < 300) = P(300 < X < 305)$

Como $P(295 < X < 305) = 0{,}90$, temos

$P(295 < X < 300) = P(300 < X < 305) = 0{,}45$

$P(X < 295) = P(X < 300) - P(295 < X < 300)$

Logo,

$P(X < 295) = 0{,}5 - 0{,}45$

$\Leftrightarrow \; P(X < 295) = 0{,}05$

R: (A)

6.2.

O gráfico A, não pode ser porque a área da superfície do líquido aumenta até este ocupar metade do frasco e, a partir desse instante, a área começa a diminuir, ao contrário do que sugere o gráfico, no qual a área está sempre a aumentar.

O gráfico B, não corresponde porque a superfície do líquido é sempre um retângulo, o qual não tem área nula, como sugere o gráfico.

7.

7.1.

	Transportadora A	**Transportadora B**
Valor Fixo	9,50€/serviço	5€/serviço
Valor Variável	0,60€/km	0,85€/km
Preço a pagar	9,50 +10×0,60 = 15,5	5 +10×0,85 = 13,5

Na transportadora A o preço a pagar seria de 15,5 € e na transportadora B o preço a pagar seria de 13,5 €, pelo que a transportadora B é a que apresenta um preço menor para um percurso de 10km.

7.2.

	Transportadora A	**Transportadora B**
Valor Fixo	9,50€/serviço	5€/serviço
Valor Variável	0,60€/km	0,85€/km
Preço a pagar em função dos x km percorridos	$y_A = 9{,}50 + 0{,}60x$	$y_B = 5 + 0{,}85x$

$$9{,}50 + 0{,}60x = 5 + 0{,}85x \Leftrightarrow 9{,}50 - 5 = 0{,}85x - 0{,}60x \Leftrightarrow 4{,}50 = 0{,}25x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{4{,}5}{0{,}25} = x \Leftrightarrow 18 = x$$

O preço a pagar pelo serviço em ambas as transportadoras é igual quando o percurso é de 18 km.

8.

O perímetro de uma circunferência é dado pela fórmula
$P_{circunferência} = 2\pi r$, em que r representa o raio da circunferência.
pelo que, o perímetro de uma semicircunferência é dado pela fórmula
$P_{circunferência} = \pi r$

Diâmetro	Raio	Perímetro da semicircunferência
1	0,5	$0{,}5\pi$
2	1	π
3	1,5	$1{,}5\pi$
4	2	2π
5	2,5	$2{,}5\pi$

Numa progressão aritmética a razão é determinada pela diferença entre dois termos consecutivos dessa progressão.
Assim, por exemplo
$razão = \pi - 0{,}5\pi$
$\Leftrightarrow razão = 0{,}5\pi$
$\Leftrightarrow razão = \frac{\pi}{2}$, como queríamos demonstrar.

8.1.

Sendo u_n a sucessão que a cada termo, faz corresponder o perímetro da correspondente semicircunferência e sendo u_n uma progressão aritmética, teremos
$u_n = u_1 + (n-1)r$
Assim, neste caso, teremos
$u_n = \frac{\pi}{2} + (n-1)\frac{\pi}{2}$,
$\Leftrightarrow u_n = \frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$
$\Leftrightarrow u_n = \frac{n\pi}{2}$

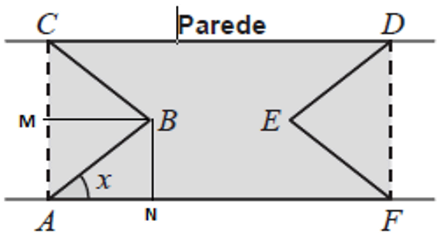
Deste modo
$u_{100} = 50\pi$

Pelo que
$S_{100} = \frac{0{,}5\pi + 50\pi}{2} \times 50$
$\Leftrightarrow S_{100} = 2525\pi$, como queríamos demonstrar.

9.

9.1.

Seja M o ponto médio de [AC].
Seja [AM] paralelo a [BN]
$\overline{AC} = 2\overline{BN} = 2\overline{AM}$



sen $x = \frac{\overline{BN}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow$ sen $x = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow$ sen $x = \frac{\overline{AM}}{1{,}5} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1{,}5$sen $x = \overline{AM}$

Como
$\overline{AC} = 2\overline{AM} \Leftrightarrow \overline{AC} = 2\times 1{,}5\ sen\ x \Leftrightarrow \overline{AC} = 3sen\ x$

Resposta: $\overline{AC} = 3sen\ x$ cm

9.2.

Se por cada 5 voltas completas da manivela no mesmo sentido, a amplitude x aumenta 6º, então após 25 voltas completas a amplitude aumentou 30º.

Se após 25 voltas completas da manivela, $\overline{AC}$ aumentou 1 metro, então (sabendo que $\overline{AC} = 3\text{sen } x$)

$3\text{sen } x + 1 = 3\text{sen }(x + 30)$.

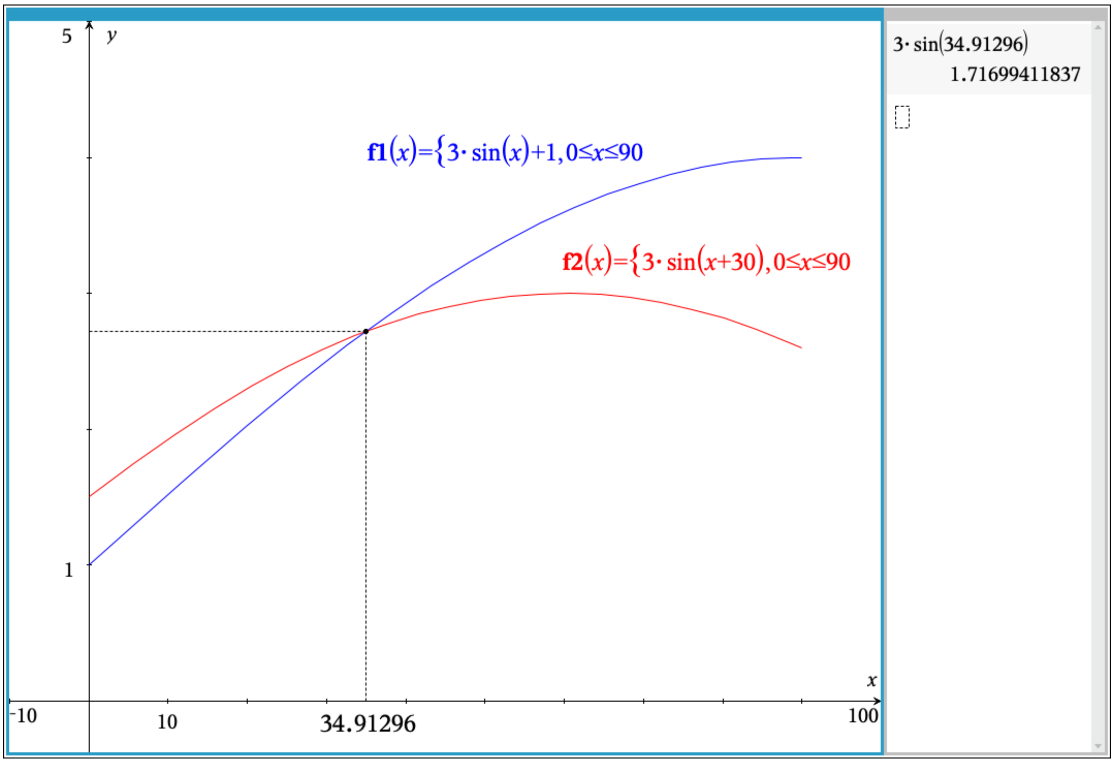
Resolvendo graficamente o problema:

Considerando as funções:

$$f1(x) = 3sen\,x + 1$$
$$f2(x) = 3sen\,(x + 30)$$

restringidas ao intervalo $[0, 90°]$.

Com a calculadora gráfica determinamos o ponto de interseção dos dois gráficos.



Obtemos, deste modo o valor de $x \approx 34{,}91296$, e então

$$\overline{AC} \approx 3sen(34{,}91296) \Leftrightarrow \overline{AC} \approx 1{,}717$$

Resposta: $\overline{AC} = 1{,}72$ metros.

FIM