Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO (CÓDIGO DA PROVA 735) – 2ª FASE – 22 DE JULHO 2025

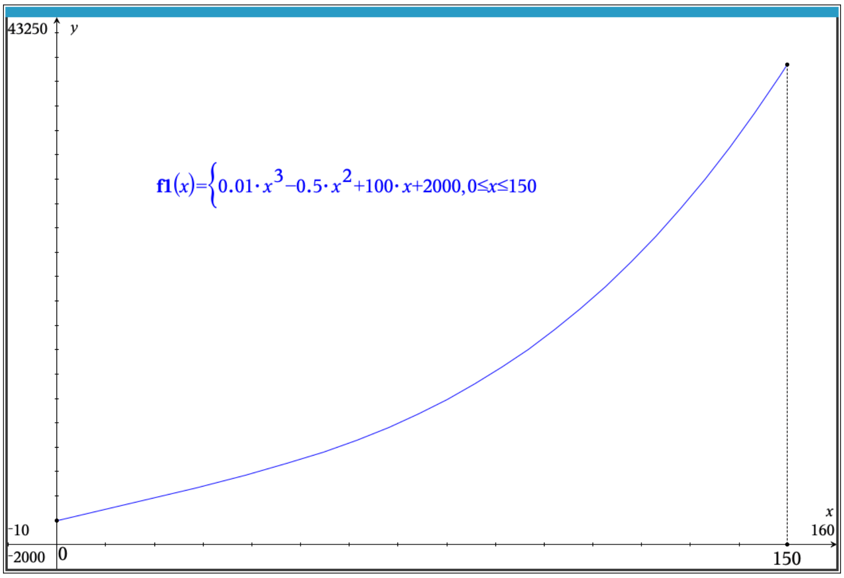
1.

1.1.

A empresa tem custos fixos de produção relativamente a este produto, isto é, custos que não dependem da quantidade produzida, no valor de $C(0) = 2000$ euros.

O valor máximo do custo total de produção que a empresa pode ter é de $C(150) = 39\,500$ euros.

Repare-se no gráfico, no intervalo onde a função está definida ela é sempre crescente, pelo que o máximo é atingido para $x = 150$.



Se a empresa produzir 10 unidades, o custo por unidade é igual a

$\frac{C(10)}{10} = 296$ euros.

Em resumo temos

I	II	III
a) 2 000	**c)** 39 500	**a)** 296

1.2.

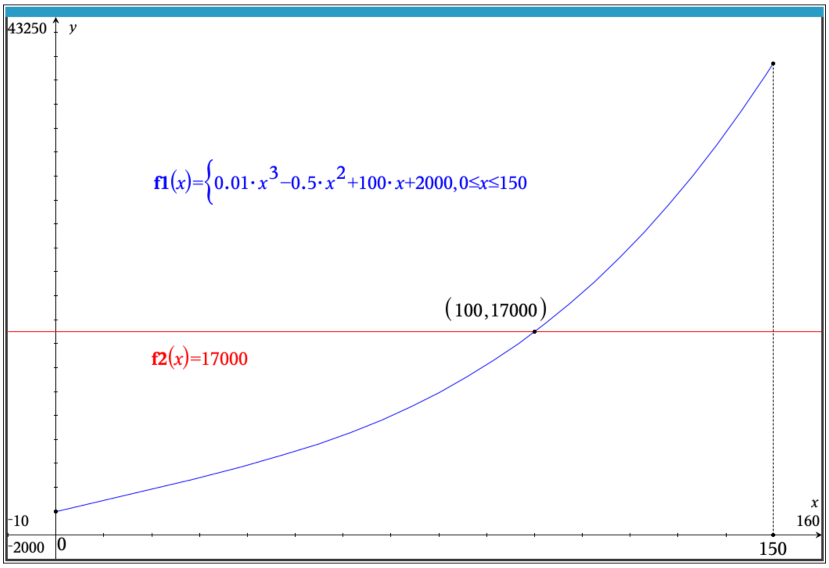
Para determinar o número de unidades que a empresa deve produzir, para que o custo total de produção seja de 17 000 euros, temos de resolver a equação:

$C(x) = 17\,000$

$\Leftrightarrow 0{,}01\,x^3 - 0{,}5\,x^2 + 100\,x + 2\,000 = 17\,000$

$\Leftrightarrow x = 100$

Repare-se nos gráficos que nos permitem confirmar que a resposta é $x = 100$.



Resposta: Para que o custo total da produção seja de 17 000 euros, terão de ser produzidas 100 unidades.

2.

2.1.

Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AC]$.

$[BAM]$ é um triângulo retângulo em M.

$ABM = 30^o$

$\sin 30^o = \frac{\overline{AM}}{3}$

$\Leftrightarrow \overline{AM} = 3 \times \sin 30^o$

$\Leftrightarrow \overline{AM} = 3 \times \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \overline{AM} = \frac{3}{2}$

$\overline{AC} = 2\overline{AM} = 3$

Resposta: (C)

2.2.

Recorrendo à fórmula, disponibilizada no formulário podemos calcular o comprimento do arco de circunferência AC, em cada um dos casos.

Relativamente ao projeto P2, temos

- $r = 3$
- $\alpha = 60^{\text{o}}$

Assim, temos

$$\frac{60 \times \pi \times 3}{180} = \pi$$

Relativamente ao projeto P3

$\overline{AE}$ corresponde à diagonal do retângulo $[AFEB]$

Aplicando o teorema de Pitágoras, a esse retângulo temos $\overline{AE} = 5\ m$. Pois $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2$

- $r = 5$
- $\alpha = 35^{\text{o}}$

Assim, temos

$$\frac{35 \times \pi \times 5}{180} = \frac{35}{36}\pi$$

Resposta: Como $\frac{35}{36}\pi < \pi$, o arco do projeto P3 é menor, pelo que deverá ser este o projeto escolhido.

3.

3.1.

Consideremos a figura abaixo, onde apresentamos a tabela, numa folha de cálculo e a regressão linear da pontuação média em Matemática y, sobre a pontuação média em leitura x.

	A leitura	B math	C	D	E	F	G	H
=						=LinRegMx('leitura,'math,1):		
1	470	454			Título	Regressão linear (mx+b)		
2	478	466			RegEqn	m*x+b		
3	472	466			m	1.35794		
4	489	487			b	⁻178.884		
5	488	487			r²	0.915623		
6	498	492			r	0.956882		
7	492	492			Resid	{⁻5.3467966574,⁻4.2103064...		
8	477	472						
9								

Considerando a regressão $f(x) = 1.358x - 178.884$ e calculando $f(495) = 493$.

Resposta: com base no modelo proposto, o correspondente valor da pontuação média em Matemática é de 493.

3.2.

Considerando que os 100% corresponde a 1, temos $1 - (0.047 + 0.231) = 0{,}722$, portanto 72,2% dos alunos atingiram os níveis 2, 3 ou 4 de proficiência. Assim, 72,2% de 6793 corresponde a $4904{,}55$, ou seja, arredondando às unidades estão 4905 alunos nas condições pedidas.

Resposta: (B)

4.

Para determinar o número de casos possíveis consideremos os cinco livros $\{l_1, l_2, l_3, t_1, t_2\}$

As hipóteses possíveis de oferecer dois quaisquer livros são $\{l_1, l_2\}$, $\{l_1, l_3\}$, $\{l_1, t_1\}$, $\{l_1, t_2\}$, $\{l_2, l_3\}$, $\{l_2, t_1\}$, $\{l_2, t_2\}$, $\{l_3, t_1\}$, $\{l_3, t_2\}$, $\{t_1, t_2\}$, portanto existem 10 casos possíveis.

Para determinar o número de casos em que a Antónia oferece, pelo menos, um livro de literatura, consideremos os casos em que a Antónia não oferece nenhum livro de leitura que neste problema é 1, que é $\{t_1, t_2\}$.

Logo, o número de casos favoráveis é: $10 - 1 = 9$ (usámos o acontecimento contrário).

Assim a probabilidade de a Antónia oferecer, pelo menos, um livro de literatura ao Bruno é de $\frac{9}{10}$, ou seja, de 90%.

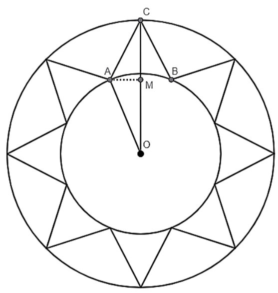
5.

A função representada no **gráfico A** não pode ser a função F, porque, após os 60 segundos, existe um intervalo de tempo em que a função representada é negativa, o que significa que, nesse intervalo, a velocidade estaria a diminuir e não a aumentar.

A função representada no **gráfico B** não pode ser a função F, porque, entre os 30 e os 50 segundos, a função representada é negativa, logo ter-se-ia que $v(50) < v(30)$, o que significa que a taxa de variação média da função v seria negativa em [30,50] e não positiva.

6.

6.1.



Considerar o triângulo $[AOC]$, sendo A e C dois vértices consecutivos da linha poligonal e M o ponto médio de $[AB]$.

O arco AB mede 45°, pelo que o ângulo AOB mede o mesmo, por se tratar de um ângulo ao centro.

Por conseguinte o ângulo AOM mede 22,5°.

Donde:

$\text{sen}\, 22{,}5° = \frac{\overline{AM}}{6} \Leftrightarrow \overline{AM} = 6 \times \text{sen}\, 22{,}5°$ e $\cos 22{,}5° = \frac{\overline{OM}}{6} \Leftrightarrow \overline{OM} = 6 \times \cos 22{,}5°$

Pelo que: $\overline{CM} = 10 - \overline{OM} = 10 - 6 \times \cos 22{,}5°$

Finalmente pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{AM}^2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\overline{AC}>0} \overline{AC} = \sqrt{(10 - 6 \times \cos 22{,}5°)^2 + (6 \times \operatorname{sen} 22{,}5°)^2} \approx 5{,}0134$$

O comprimento da linha poligonal mede $16 \times 5{,}0134 \approx 80{,}2$ cm.

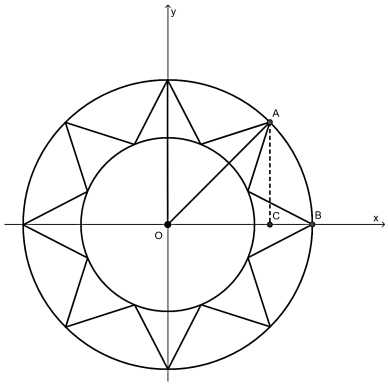
6.2.

Pelo enunciado $\overline{OB} = \overline{OA} = 10$ cm e como arco AB mede 45° concluiu-se que o ângulo AOB mede 45°.

Pelo que considerando C a projeção ortogonal de A sobre OB, concluímos que $\overline{AC} = \overline{OC} = x$ pelo Teorema de Pitágoras:

$$10^2 = x^2 + x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{100}{2}} \Leftrightarrow x \approx 7{,}1$$

As coordenadas do ponto A são $(7{,}1;\ 7{,}1)$.



7.

Para as conversões de valores de temperatura entre graus Celsius, C, e graus Fahrenheit, F, e entre graus Celsius, C, e kelvin, K, temos as fórmulas:

$$\mathrm{F} = 1{,}8\mathrm{C} + 32 \quad \text{e} \quad \mathrm{K} = \mathrm{C} + 273{,}15$$

7.1.

O valor da temperatura de congelamento da água, em graus Fahrenheit, é 32 porque sendo 0 °C o ponto de congelamento em graus Celsius, substituindo o C por zero na fórmula $\mathrm{F} = 1{,}8\mathrm{C} + 32$ obtemos $\mathrm{F} = 32$.

O valor da temperatura da ebulição da água, em kelvin, é $\mathrm{K} = 100 + 273{,}15 = 373{,}15$, basta substituir o C por 100 na fórmula $\mathrm{K} = \mathrm{C} + 273{,}15$.

O zero absoluto da escala Kelvin corresponde a $-273{,}15$ graus Celsius, pois basta resolver a equação $0 = \mathrm{C} + 273{,}15$, em ordem a C:

Em resumo temos

I	II	III
c) 32	**c)** 373,15	**a)** $-273{,}15$

7.2.

Admitindo que a temperatura média do sol é 5778 K, pretendemos determinar o valor da temperatura média da superfície do Sol, em graus Fahrenheit. Dado que temos uma fórmula que relaciona graus kelvin com graus Celsius e outra que relaciona graus Celsius com graus Fahrenheit, vamos começar por determinar a temperatura média do sol em graus Celsius e depois em Fahrenheit.

Assim,

$$5778 = \mathrm{C} + 273{,}15 \Leftrightarrow C = 5778 - 273{,}15 \Leftrightarrow \mathrm{C} = 5504{,}85$$

E agora vamos resolver a equação $\mathrm{F} = 1{,}8 \times 5504{,}85 + 32$, em ordem a F. Logo

$$\mathrm{F} = 1{,}8 \times 5504{,}85 + 32 = 9940{,}73$$

Arredondado às unidades a temperatura média do sol é 9941 °F.

8.

A sucessão das áreas dos sucessivos hexágonos são termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

Como

$$h_1 = 1;\ h_2 = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{2-1};\ h_3 = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{3-1};\ldots$$

Podemos concluir que

$$h_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

E assim,

$$h_7 = \left(\frac{1}{4}\right)^{7-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{6} = \frac{1}{4096}$$

Portanto a área do sétimo hexágono desta composição geométrica é $\frac{1}{4096}$.

9.

Para justificarmos que nesta eleição, foi necessária a realização da segunda votação temos que começar por determinar o número de votos validamente expressos: $V = 1443683 + 2629597 + 1185867 + 418961 = 5678108$

O número mínimo de votos que um candidato deve ter para que não haja segunda volta é $\frac{5678108}{2} + 1 = 2839054 + 1 = 2839055$.

Como nenhum candidato obteve, pelo menos, este número de votos, teve de haver segunda volta. Esta foi entre os candidatos mais votados o B e o A.

FIM