Proposta de Resolução do Exame de Matemática A
Código 635 – 1ª Fase 2009

GRUPO I

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão **1**	A	D	B	C	D	A	C	C
Versão **2**	D	A	C	B	A	D	B	B

GRUPO II

1.

1.1. $z_1 = \frac{i}{1-i} - i^{18} = \frac{i(1+i)}{2} - i^2 = \frac{i-1}{2} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2} cis \frac{\pi}{4}$, visto que $|z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $Arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$.

1.2. Dado que $-i = cis\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, temos que $(-i \times z_2)^n = \left(cis\left(\frac{3\pi}{2}\right) \times cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)^n = \left(cis\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}\right)\right)^n = \left(cis\left(\frac{14\pi}{6}\right)\right)^n = \left(cis\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^n = cis\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

Atendendo a que $-1 = cis\,\pi$, vem que $cis\left(\frac{n\pi}{3}\right) = cis\,\pi$, donde $\frac{n\pi}{3} = \pi + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

Assim, $n = 3 + 6k, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, pelo que o menor valor de n é 3 (para $k = 0$)

2. Há 7 lugares para colocar os três algarismos 1. Dos 4 lugares restantes, dois podem ser ocupados por algarismos 5, ficando os algarismos 4 nos lugares sobrantes. Assim, o total de números diferentes que satisfazem as condições é dado por ${}^7C_3 \times {}^4C_2$, cujo valor é 210.

3.

3.1. O valor de probabilidade pode ser dado por $\frac{10\times10\times2}{20\times19}=\frac{10}{19}$

3.2. $P\big((B\cap C)|A\big)$ significa “probabilidade de a 2ª bola ser amarela e ter número par, sabendo que a 1ª bola extraída foi verde”.

Retirada a bola verde das 20 bolas, os casos possíveis para a 2ª extracção são 19.

Há 5 casos favoráveis, que são as bolas amarelas com número par, ou seja, as amarelas numeradas com 12, 14, 16, 18 e 20.

Dado que os acontecimentos elementares são equiprováveis, pode utilizar-se a Lei de Laplace para o cálculo da probabilidade, sendo esta o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

Assim, a probabilidade pedida é dada por $\frac{5}{19}$.

4. Como $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0$, a recta de equação $y=2x$ é assimptota oblíqua do gráfico de f, pelo que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$.

A existir assimptota oblíqua ao gráfico de g, dado que $D_g=\mathbb{R}^+$, esta terá um declive m (número real não nulo) dado por

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$$

Ora, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+x\right)=2+(+\infty)=+\infty$

Deste modo não há assimptota oblíqua ao gráfico de g.

5.

5.1. A função g é contínua em $[0{,}1; 0{,}3]$ porque é a soma de duas funções contínuas em $\mathbb{R}^+$,pelo que pode ser aplicado o teorema de Bolzano no intervalo $[0{,}1; 0{,}3]$.

$$g(0{,}1) = e^{0{,}2} + ln(0{,}1) \simeq -1{,}08$$

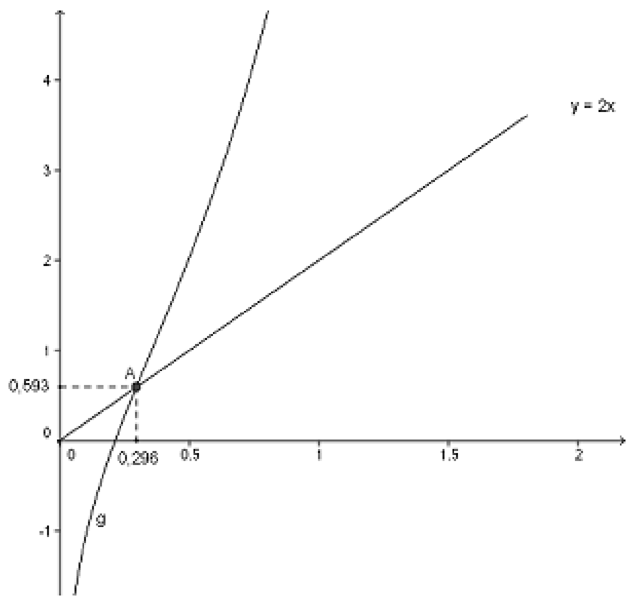
$$g(0{,}3) = e^{0{,}6} + ln(0{,}3) \simeq 0{,}62$$

Como $g(0{,}1) \times g(0{,}3) < 0$, então, pelo corolário do teorema de Bolzano, há pelo menos um zero da função g no intervalo $]0{,}1; 0{,}3[$.

5.2. O ponto A é da forma $A(a, 2a), a \in]0{,}2]$ e corresponde ao ponto de intersecção do gráfico da função g com o da função definida por $y = 2x$. Deste modo, a abcissa de A é solução da equação

$$e^{2x} + \ln x = 2x$$

Recorrendo à representação gráfica da função g e da função definida por $y = 2x$, podemos obter as coordenadas do ponto de intersecção A, que com a aproximação pretendida são $A(0{,}3; 0{,}6)$.



6. O domínio da condição é $D_f \cap D_g =]-\infty, 2[\cap]1, +\infty[=]1{,}2[$. Nesse domínio,

$$\log_2(x-1) \geq 1 + \log_2(2-x) \Leftrightarrow \log_2(x-1) - \log_2(2-x) \geq 1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{x-1}{2-x} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2-x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2-x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1-2(2-x)}{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x-5}{2-x} \geq 0$$

Dado que, em $]1{,}2[$, é $2 - x > 0$, temos que $\frac{3x-5}{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow 3x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$

Deste modo, o conjunto solução da condição é $\left[\frac{5}{3}, 2\right[$.

7.

7.1. $\lim_{t \to +\infty} C(t) = \lim_{t \to +\infty} 2te^{-0,3t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{2t}{e^{0,3t}} = 2 \times \lim_{t \to +\infty} \frac{0,3t}{e^{0,3t}} = 2 \times 0 = 0$, tendo em conta que se conhece que $\lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$, pelo que $\lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$.

O limite ser zero significa que a concentração de medicamento tende a anular-se à medida que o tempo passa, pelo que, o medicamento tende a desaparecer do sangue.

7.2. $C'(t) = 0 \Leftrightarrow 2e^{-0,3t} - 0,3e^{-0,3t} \times 2t = 0 \Leftrightarrow (2 - 0,6t)e^{-0,3t} = 0 \Leftrightarrow 2 - 0,6t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{3}$

	0		$\frac{10}{3}$		$+\infty$
C'		+	0	-	
C		↗	Máx	↘	

$\frac{10}{3}h$ corresponde a 3 horas e um terço da hora, ou seja, 3h 20min

Assim, como o medicamento foi tomado às 9h, significa que a concentração máxima ocorreu às 12h 20min.