Proposta de Resolução do Exame de Matemática A
Código 635 – 2.ª Fase 2009

GRUPO I

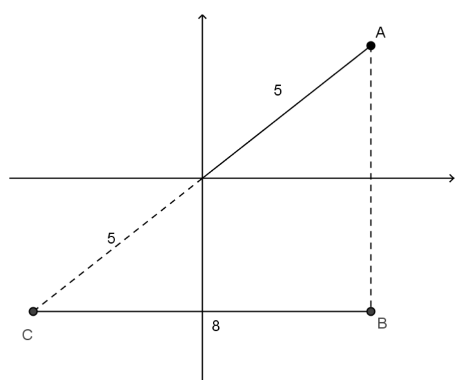
Questões	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão **1**	D	C	C	B	C	D	C	A
Versão **2**	A	B	B	C	B	A	B	D

GRUPO II

1.

$$z=\frac{\left(cis\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^7+(2+i)^3}{4cis\left(\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{cis\left(\frac{7\pi}{7}\right)+(2+i)(2+i)^2}{-4i}=\frac{cis\pi+(2+i)(3+4i)}{-4i}=\frac{-1+2+11i}{-4i}=\frac{(1+11i)\times i}{-4i\times i}=\frac{i-11}{4}=-\frac{11}{4}+\frac{1}{4}i.$$

2.



$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{36}=6 \qquad A=\frac{8\times 6}{2}=24$$

A área do triânguilo [ABC] é de 24 unidades

3. $1 - P(A|B) \times P(B) - P(A \cap \bar{B}) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \times P(B) - P(A \cap \bar{B}) = 1 - [P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})] =$

$= 1 - P[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})]$, dado que os conjuntos $A \cap B$ e $A \cap \bar{B}$ são disjuntos.

Logo, $1 - P[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})] = 1 - P[A \cap (B \cup \bar{B})] = 1 - P(A) = P(\bar{A})$, tal como se pretendia.

4.1. O número de sequências nas condições enunciadas é dado $4 \times 12 \times 11 \times 10 \times 3 = 15840$

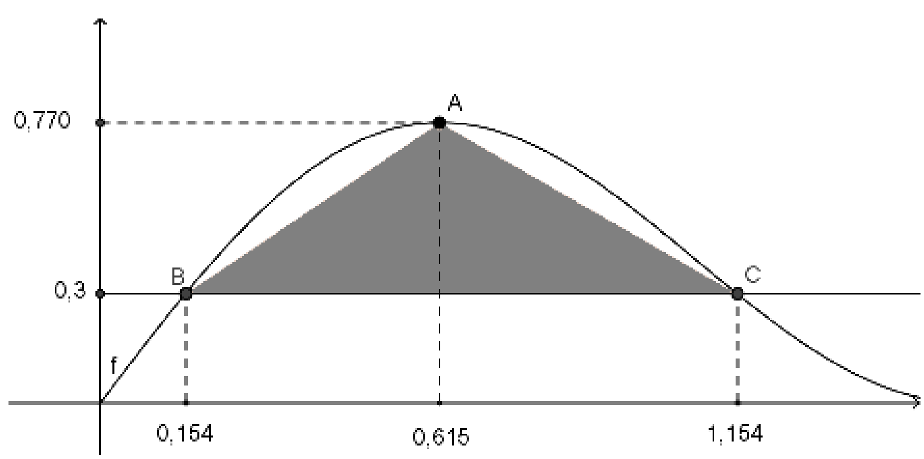
4.2. Como o baralho tem 52 cartas, o número de subconjuntos de três cartas que dele se podem retirar é dado por ${}^{52}C_3$.

O número de casos favoráveis é o número de subconjuntos de 3 cartas constituídos por dois dos 4 ases e por uma das 48 cartas restantes, que não são ases. Esse número de subconjuntos é dado por ${}^{4}C_2 \times 48$.

Como se trata de acontecimentos equiprováveis, a probabilidade pretendida pode obter-se aplicando a Regra de Laplace, isto é, calculando o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis que, neste caso, é $\frac{{}^{4}C_2 \times 48}{{}^{52}C_3}$.

5.1. $f'(x) = 2cos(2x) \times cosx - senx \times sen(2x)$. Como $f'(0) = 2$, temos que o declive da recta tangente é 2. Sendo $f(0) = 0$, a ordenada na origem é zero e consequentemente a equação reduzida da recta pretendida é $y = 2x$.

5.2.



$$A = \frac{(1{,}15 - 0{,}15) \times (0{,}77 - 0{,}3)}{2} = \frac{0{,}47}{2} \simeq 0{,}2$$

A área do triângulo pedido é de 0,2 unidades.

6.1. h é contínua em $\mathbb{R}^+$ porque para $a > 0$ temos que $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a}\left(\sqrt{x^2+4} - x\right) = \sqrt{a^2+4} - a = h(a)$ e $h(a)$ é real**.** h é também contínua em $\mathbb{R}^-$ porque para $b < 0$ temos que $\lim\limits_{x\to b} h(x) = \lim\limits_{x\to b} \frac{e^{2x}-1}{x} = \frac{e^{2b}-1}{b} = h(b)$ e $h(b)$ é real.

A função h será contínua para $x = 0$ se existir $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ e se $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = h(0) = 2$.

Haverá $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ se existirem e forem iguais os limites laterais em zero.

Assim, $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x^2+4} - x\right) = \sqrt{0+4} - 0 = 2$

e $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x} \times 2 = 1 \times 2 = 2$.

Deste modo, a função h é continua em $\mathbb{R}$.

6.2. Como a função tem domínio $\mathbb{R}$ e é contínua em $\mathbb{R}$ não existem assímptotas verticais.

Quanto às assímptotas horizontais, teremos de estudar $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+4} - x\right)$, que conduz a uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$.

Ora, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+4} - x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+4-x^2}{\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4}{\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)} = 0$, dado que $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+4} + x\right) = +\infty$.

Assim, a recta de equação $y = 0$ é assímptota horizontal do gráfico da função quando $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{e^{2x}-1}{x} = 0$, visto que $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{2x} - 1 = 0 - 1 = -1$ e $\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$

Assim, a recta de equação $y = 0$ é também assímptota horizontal do gráfico da função quando $x \to -\infty$.

7.1. Sendo $A(0) = 2 - 0 + 5 \times ln(0+1) = 2$ e $A(1) = 2 - 1 + 5\ln(1+1) = 1 + 5ln2$, temos que $A(1) - A(0) = 1 + 5\ln(2) - 2 = 5\ln(2) - 1 \simeq 2{,}47$.

O aumento da área de cultivo afectada ao fim da primeira semana foi de aproximadamente 2,47 ha.

7.2. $A'(t) = -1 + \frac{5}{t+1}$

$A'(t) = 0 \Leftrightarrow t + 1 = 5 \Leftrightarrow t = 4$

t	0		4		16
A'	4	$+$	0	$-$	$n.d.$
A		$\nearrow$	Máx	$\searrow$	

$$A(4) = 2 - 4 + 5\ln(4+1) \simeq 6{,}05$$

A área máxima afectada pela doença é de aproximadamente 6,05 ha.