Proposta de resolução do exame nacional de Matemática A
(PROVA 635) 1ªFASE – 27 Junho 2011

Grupo I

1. Como os acontecimentos são independentes, então, a probabilidade de se verificar um acontecimento não se altera pela ocorrência, ou não, do outro, pelo que : $P(B|A) = P(B)$

   Opção correcta: versão 1: D versão 2: B

2. Como só podem existir exactamente dois algarismos iguais a 7, então para as outras duas hipóteses restam 9 algarismos que se podem repetir. Existem ${}^4C_2$ formas diferentes de colocar os dois algarismos 7.
   O número de códigos diferentes é dado por: ${}^4C_2 \times 9 \times 9 = 486$

   Opção correcta: versão 1: A versão 2: C

3. Por definição de assimptota oblíqua tem-se que : $\lim_{x\to+\infty}(g(x)-(2x-4))=0$ ou seja $\lim_{x\to+\infty}(g(x)-2x+4)=0$

   Opção correcta: versão 1: C versão 2: A

4. A função é contínua excepto para x=5. Fica assim excluída como hipótese de resposta a opção C em ambas as versões
   f(0)= -8, f(1)=-7 f(4)=7
   como f(1)×f(4)<0, então f admite pelo menos um zero no intervalo $]1,4[$

   Opção correcta: versão 1: B versão 2: D

5. $$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}sen^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{sen\,\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)\right)^2=\left(\frac{1}{2}\times1\right)^2=\frac{1}{4}$$

   Opção correcta: versão 1: C versão 2: C

6. Estudando , por observação do gráfico de f, o sinal de $f'(0)$, $f'(6)$ e $f'(-3)$ tem-se que $f'(0)<0$, $f'(6)>0$ e $f'(-3)>0$.
   A afirmação verdadeira é $f'(0)\times f'(6)<0$.

   Opção correcta: versão 1:D   versão 2:A

7. $i^{4n}+i^{4n+1}+i^{4n+2}=1+i+(-1)=i$

   O módulo de i é 1 e o argumento é $\dfrac{\pi}{2}$, logo o número complexo que lhe corresponde é z_2.
   Opção correcta: versão 1: B   versão 2: C

8. O raio da circunferência é $\sqrt[5]{32}=2$ e a amplitude do ângulo compreendido entre duas raízes, índice 5, consecutivas é $\dfrac{2\pi}{5}$.

   A área do sector circular é $\dfrac{2^2\times\dfrac{2\pi}{5}}{2}=\dfrac{4\pi}{5}$
   Opção correcta: versão 1: B   versão 2: D

Grupo II

1.
   1.1.
      Se z_1 é raiz do polinómio então, aplicando a regra de Ruffini, vem:

	1	-1	16	-16
1		1	0	16
	1	0	16	0

$$z^3-z^2+16z-16=(z-1)(z^2+16)$$

As restantes raízes do polinómio poderão obter-se através da resolução da seguinte equação:

$$z^2+16=0 \Leftrightarrow z^2=-16 \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{-16} \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{16}\ i \Leftrightarrow z=\pm 4i$$

Na forma trigonométrica:

$$z=4cis\frac{\pi}{2} \ \vee \ z=4cis\frac{3\pi}{2}$$

1.2.

$$z_2=5i=5cis\frac{\pi}{2}$$

$$z_2\times z_3=5cis\frac{\pi}{2}\times cis\left(\frac{n\pi}{40}\right)=5cis\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{40}\right)=5cis\left(\frac{20\pi+n\pi}{40}\right)$$

Para $z_2\times z_3$ pertencer ao terceiro quadrante e à bissectriz dos quadrantes impares tem que se verificar:

$$\frac{20\pi+n\pi}{40}=\frac{5}{4}\pi+2k\pi \Leftrightarrow 20\pi+n\pi=50\pi+80k\pi \Leftrightarrow n\pi=30\pi+80k\pi \Leftrightarrow$$
$$n=\frac{30\pi+80k\pi}{\pi} \Leftrightarrow n=30+80k,\ k\in\mathbb{Z}$$

Para $k=0$, vem: $n=30$

2.

2.1.

Seja X a variável aleatória correspondente ao número de jovens que pagam com multibanco.

$$P(X=6)={}^9C_6\times 0,6^6\times 0,4^3\simeq 0,25$$

2.2.

Sejam os acontecimentos:

B: “o destino da viagem é Berlim”

A: “o passageiro segue viagem”

Como $P\left(\overline{\mathrm{A}}\,|\,\mathrm{B}\right)=0,05$ então $P\left(\overline{A}\cap B\right)=0,05\times 0,3=0,015$

Como $P\left(\mathrm{A} \mid \overline{\mathrm{B}}\right)=0,92$ então $P\left(\overline{B} \cap A\right)=0,92\times 0,7=0,644$

Esquematizando na tabela seguinte os resultados fornecidos e os obtidos, temos:

	A	$\overline{\mathrm{A}}$	Total
B	0,285	0,015	0,3
$\overline{B}$	0,644	0,056	0,7
Total	0,929	0,071	1

$$P\left(\overline{\mathrm{A}}\right)=P\left(\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{A}}\right)+P\left(\overline{\mathrm{B}}\cap\overline{\mathrm{A}}\right)=0,015+0,056=0,071$$

3.

$$P\left(\mathrm{B}|\mathrm{A}\right)\geq 1-\frac{1-P\left(\mathrm{B}\right)}{P\left(\mathrm{A}\right)}\Leftrightarrow\frac{P\left(\mathrm{B}\cap\mathrm{A}\right)}{P\left(\mathrm{A}\right)}\geq\frac{P\left(\mathrm{A}\right)-1+P\left(\mathrm{B}\right)}{P\left(\mathrm{A}\right)} \quad (1)$$

Como $P\left(\mathrm{A}\right)>0$, então, de (1) vem que:

$$P\left(\mathrm{B}\cap\mathrm{A}\right)\geq P\left(\mathrm{A}\right)-1+P\left(\mathrm{B}\right)\Leftrightarrow 1\geq P\left(\mathrm{A}\right)+P\left(\mathrm{B}\right)-P\left(\mathrm{B}\cap\mathrm{A}\right)\Leftrightarrow 1\geq P\left(\mathrm{B}\cup\mathrm{A}\right)\Leftrightarrow$$
$$P\left(\mathrm{B}\cup\mathrm{A}\right)\leq 1$$

o que se verifica ser uma proposição verdadeira, na axiomática de Kolmogorov, quaisquer que sejam os acontecimento A e B nas condições dadas. Fica assim provada a condição inicial.

4.

Vamos começar por calcular T'(t)

$$T'\left(t\right)=0,2t\times e^{-0,15t}+0,1t^2\times\left(-0,15e^{-0,15t}\right)=0,2t\times e^{-0,15t}-0,015t^2\times e^{-0,15t}=$$
$$=e^{-0,15t}\left(0,2t-0,015t^2\right)$$

$$T'\left(t\right)=0\Leftrightarrow e^{-0,15t}\left(0,2t-0,015t^2\right)=0\Leftrightarrow 0,2t-0,015t^2=0\Leftrightarrow t\left(0,2-0,015t\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t=0\vee 0,2-0,015t=0\Leftrightarrow t=0\vee t=\frac{-0,2}{-0,015}\Leftrightarrow t=0\vee t=\frac{40}{3}$$

x	0		$\frac{40}{3}$		20
$T'(t)$	0	+	0	–	– 0,0996
$T(t)$		↗	Máx	↘	

$$\frac{40}{3}=\frac{39}{3}+\frac{1}{3}=13+\frac{1}{3} \qquad \frac{1}{3}\times 60=20$$

A temperatura máxima será atingida às 13h20m.

5.

5.1.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x-1}=\frac{3}{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{2}{+\infty}+0=0$$

Pelo que verificamos que $y=0$ é assimptota de *f*.

Como $e>1$ então basta determinar $f'(x)$ para $x\geq 1$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-2-\ln x}{x^2}=\frac{-1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(e)=\frac{-1-\ln e}{e^2}=\frac{-2}{e^2}$$

O declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa *e* será $m=\frac{-2}{e^2}$.

Como o ponto de tangência pertence ao gráfico de *f*, vem: $f(e)=\frac{2+\ln e}{e}=\frac{3}{e}$

Assim, substituindo na equação da recta $y=\frac{-2}{e^2}x+b$, temos:

$$\frac{3}{e}=-\frac{2}{e^2}\times e+b \Leftrightarrow \frac{3}{e}=-\frac{2}{e}+b \Leftrightarrow b=\frac{5}{e}$$

A equação da recta tangente ao gráfico no ponto de abcissa *e* será: $y=-\frac{2}{e^2}x+\frac{5}{e}$

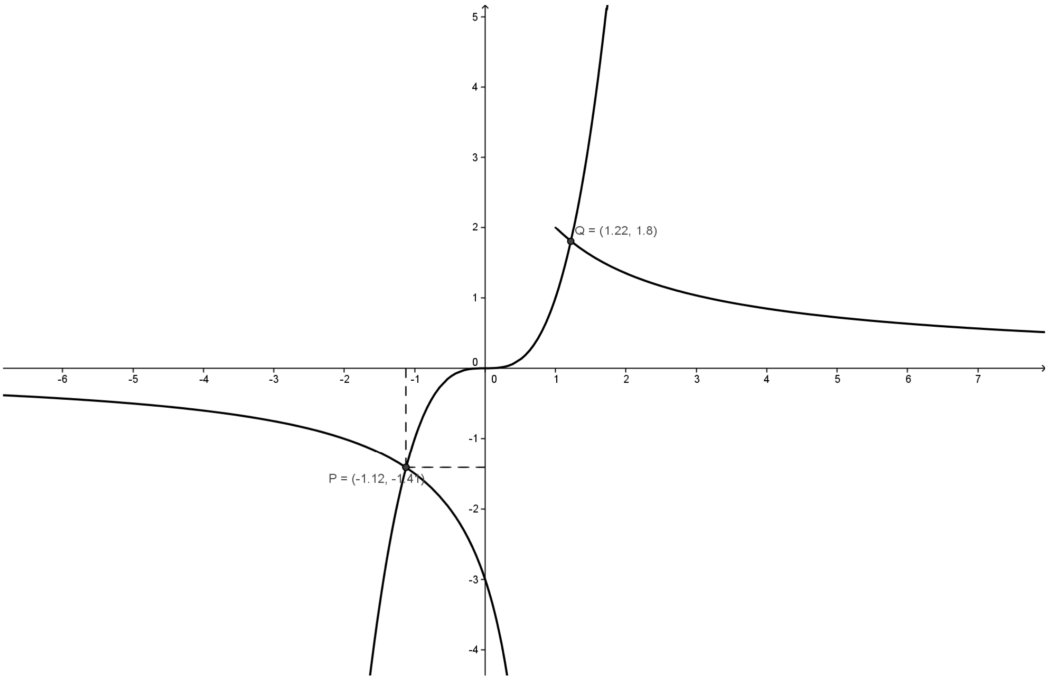
As coordenadas do ponto P serão determinadas a partir da seguinte condição:

$$-\frac{2}{e^2}x+\frac{5}{e}=0 \Leftrightarrow -\frac{2}{e^2}x=-\frac{5}{e} \Leftrightarrow x=-\frac{5}{e}\times\left(-\frac{e^2}{2}\right) \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}e$$

As coordenadas do ponto P serão: $\left(\frac{5}{2}e\ ;\ 0\right)$

5.2.

Para determinar os pontos no gráfico de *f* cujas ordenadas são o cubo das abcissas temos que verificar a condição: $f(x)=x^3$



Os pontos que verificam a condição $f(x)=x^3$ são: $P(-1{,}12;-1{,}41)$ e $Q(1{,}22;1{,}80)$.

6.

6.1.

A área do trapézio é determinada a partir da seguinte fórmula:

$$Área = \frac{\overline{AD}+\overline{CB}}{2}\times\overline{DC}$$

Como a abcissa do ponto *D* é $-\frac{\pi}{6}$ então temos que $\overline{CB}=\frac{\pi}{6}$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 4\cos(2x)=0 \Leftrightarrow \cos(2x)=0 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

Para $k=0$, temos que $x=\frac{\pi}{4}$

Assim: $\overline{AD}=\left|\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right|=\frac{5\pi}{12}$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=4\cos\left(2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=4\cos\frac{\pi}{3}=4\times\frac{1}{2}=2$$

Logo, $\overline{CD}=2$

A área do trapézio será:

$$Área=\frac{\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{6}}{2}\times 2=\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}\ \text{u.a.}$$

6.2.

$f'(x)=-8\sin(2x)$ e $f''(x)=-16\cos(2x)$

$$f(x)+f'(x)+f''(x)=4\cos(2x)-8\sin(2x)-16\cos(2x)=$$
$$=-12\cos(2x)-8\sin(2x)=-4\big(3\cos(2x)+2\sin(2x)\big)\ \text{c.q.d.}$$

7.

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow g(x)\times\left(x^2-5x+4\right)=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \vee x^2-5x+4=0$$

Como $g(x)>0, \forall_{x\in\mathbb{R}}$, então: $x=1 \vee x=4$

x	$-\infty$	1		4	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\cup$		$\cap$		$\cup$

O gráfico III representa a função *f*.

O gráfico I não pode representar a função *f* porque não tem os sentidos de concavidade de acordo com os determinados na tabela em cima.

O gráfico II não pode representar a função *f* porque $f(1)\times f(4)<0$, o que contradiz um dos pressupostos do enunciado.

O gráfico IV não pode representar a função *f* porque apresenta um ponto de descontinuidade, o que não se pode verificar pelo facto de f'' ser finita em todos os pontos do seu domínio.

FIM

Esta proposta de resolução também pode ser consultada em http://www.apm.pt