



Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase

8 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2012

VERSÃO 1

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova (Versão 1 ou Versão 2). A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 2, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u v)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos independentes;
- $P(\overline{A}) = \frac{7}{10}$
- $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$

Qual é o valor de $P(B)$?

- (A) $\frac{5}{14}$ (B) $\frac{9}{14}$ (C) $\frac{9}{20}$ (D) $\frac{11}{20}$

2. Para assistirem a um espetáculo, o João, a Margarida e cinco amigos sentam-se, ao acaso, numa fila com sete lugares.

Qual é a probabilidade de o João e a Margarida não ficarem sentados um ao lado do outro?

- (A) $\frac{2 \times 5!}{7!}$ (B) $\frac{5!}{7!}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{5}{7}$

3. Numa caixa com 12 compartimentos, pretende-se arrumar 10 copos, com tamanho e forma iguais: sete brancos, um verde, um azul e um roxo. Em cada compartimento pode ser arrumado apenas um copo.

De quantas maneiras diferentes se podem arrumar os 10 copos nessa caixa?

- (A) ${}^{12}A_7 \times 3!$ (B) ${}^{12}A_7 \times {}^5C_3$ (C) ${}^{12}C_7 \times {}^5A_3$ (D) ${}^{12}C_7 \times {}^{12}A_3$

4. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x - 3$

Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite afirmar que a equação $f(x) = -x - \frac{3}{2}$ tem, pelo menos, uma solução?

- (A) $\left]0, \frac{1}{5}\right[$ (B) $\left]\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right[$ (C) $\left]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right[$ (D) $\left]\frac{1}{3}, 1\right[$

5. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico de uma função g , de domínio $[a, +\infty[$, com $a < -\frac{1}{3}$

Para esse valor de a , a função f , contínua em $\mathbb{R}$, é definida

$$\text{por } f(x) = \begin{cases} \log_3\left(-x - \frac{1}{3}\right) & \text{se } x < a \\ g(x) & \text{se } x \geq a \end{cases}$$

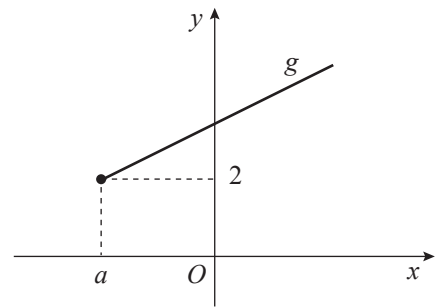


Figura 1

Qual é o valor de a ?

- (A) $-\frac{28}{3}$ (B) $-\frac{25}{3}$ (C) $-\frac{19}{3}$ (D) $-\frac{8}{3}$
6. Na Figura 2, está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico de uma função f , de domínio $\mathbb{R}$

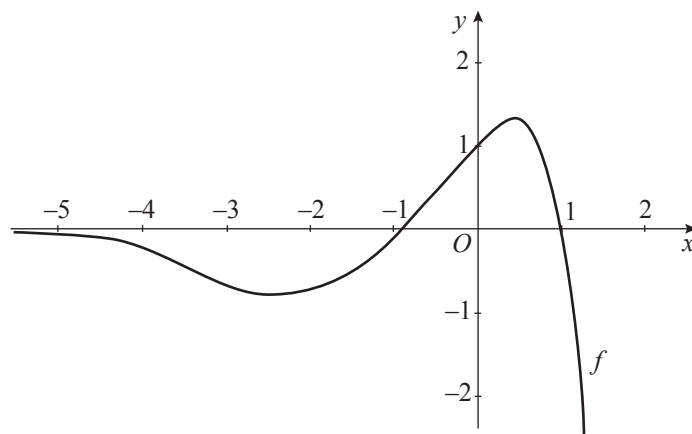


Figura 2

Sejam f' e f'' , de domínio $\mathbb{R}$, a primeira derivada e a segunda derivada de f , respetivamente.

Qual dos valores seguintes pode ser positivo?

- (A) $f'(1)$ (B) $f'(-3)$ (C) $f''(-3)$ (D) $f''(1)$

7. Na Figura 3, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos: w , z_1 , z_2 , z_3 e z_4

Qual é o número complexo que pode ser igual a $\frac{w}{3i}$?

- (A) z_1
(B) z_2
(C) z_3
(D) z_4

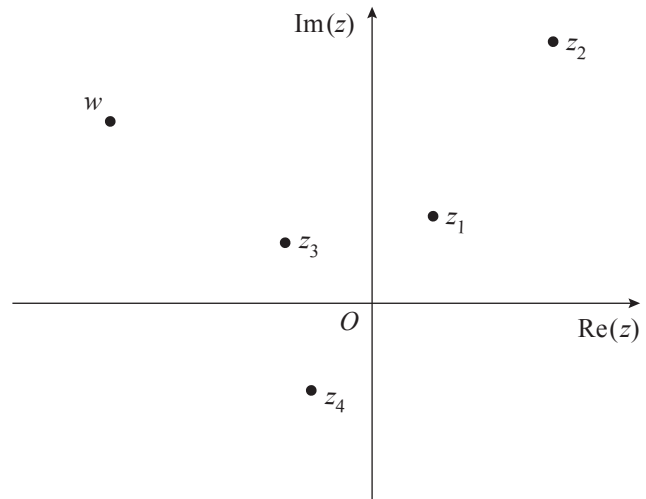


Figura 3

8. Na Figura 4, está representada, a sombreado, no plano complexo, parte de uma coroa circular.

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- o ponto Q é a imagem geométrica do complexo $-1 + i$
- a reta PQ é paralela ao eixo real;
- as circunferências têm centro na origem;
- os raios das circunferências são iguais a 3 e a 6

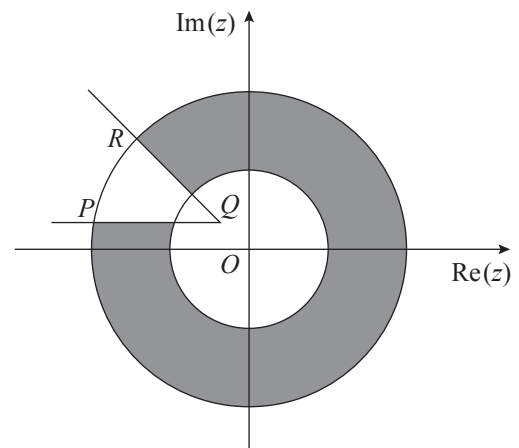


Figura 4

Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $[-\pi, \pi[$

Qual das condições seguintes pode definir, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a região a sombreado, incluindo a fronteira?

- (A) $3 \leq |z| \leq 6 \wedge -\pi \leq \arg(z - 1 + i) \leq \frac{3\pi}{4}$
(B) $9 \leq |z| \leq 36 \wedge -\pi \leq \arg(z + 1 - i) \leq \frac{3\pi}{4}$
(C) $3 \leq |z| \leq 6 \wedge -\pi \leq \arg(z + 1 - i) \leq \frac{3\pi}{4}$
(D) $9 \leq |z| \leq 36 \wedge -\pi \leq \arg(z - 1 + i) \leq \frac{3\pi}{4}$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = (-2 + i)^3$ e $z_2 = \frac{1 + 28i}{2 + i}$

1.1. Resolva a equação $z^3 + z_1 = z_2$, sem recorrer à calculadora.

Apresente as soluções da equação na forma trigonométrica.

1.2. Seja w um número complexo não nulo.

Mostre que, se w e $\frac{1}{w}$ são raízes de índice n de um mesmo número complexo z , então $z = 1$ ou $z = -1$

2. Numa escola, realizou-se um estudo sobre os hábitos alimentares dos alunos. No âmbito desse estudo, analisou-se o peso de todos os alunos.

Sabe-se que:

- 55% dos alunos são raparigas;
- 30% das raparigas têm excesso de peso;
- 40% dos rapazes não têm excesso de peso.

2.1. Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola.

Determine a probabilidade de o aluno escolhido ser rapaz, sabendo que tem excesso de peso.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Considere agora que a escola onde o estudo foi realizado tem 200 alunos.

Pretende-se escolher, ao acaso, três alunos para representarem a escola num concurso.

Determine a probabilidade de serem escolhidos duas raparigas e um rapaz.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

3. Num saco estão cinco bolas, indistinguíveis ao tato, cada uma delas numerada com um número diferente: $-2, -1, 0, 1$ e 2

Extraem-se, ao acaso e em simultâneo, quatro bolas do saco.

Seja X a variável aleatória «produto dos números inscritos nas bolas extraídas».

A tabela de distribuição de probabilidades da variável X é a seguinte.

x_i	0	4
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

Elabore uma composição na qual:

- explique os valores da variável X
- justifique cada uma das probabilidades.

4. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, e a função g , de domínio $]0, +\infty[$, definidas por

$$f(x) = e^{x-2} - \frac{4e^{-x} + 4}{e^2} \quad \text{e} \quad g(x) = -\ln(x) + 4$$

4.1. Mostre que $\ln(2 + 2\sqrt{2})$ é o único zero da função f , recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

4.2. Considere, num referencial o. n. xOy , os gráficos das funções f e g e o triângulo $[OAB]$

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- A e B são pontos do gráfico de f
- a abcissa do ponto A é o zero da função f
- o ponto B é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o gráfico da função g

Determine a área do triângulo $[OAB]$, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir os gráficos das funções f e g , devidamente identificados, incluindo o referencial;
- assinalar os pontos A e B
- indicar a abcissa do ponto A e as coordenadas do ponto B com arredondamento às centésimas;
- apresentar o valor da área pedida com arredondamento às décimas.

5. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \ln(x+1) - x \ln(x) + 3x & \text{se } x > 0 \\ x e^{1-x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

5.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas não verticais do seu gráfico.

5.2. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $x = -1$

6. Na Figura 5, está representado um trapézio retângulo $[ABCD]$

Sabe-se que:

- $\overline{BC} = 1$
- $\overline{CD} = 1$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo ADC
- $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$

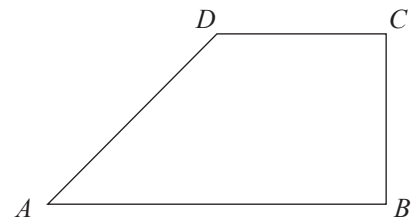


Figura 5

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

6.1. Mostre que o perímetro do trapézio $[ABCD]$ é dado, em função de α , por $P(\alpha) = 3 + \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$

6.2. Para um certo número real θ , tem-se que $\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{8}$, com $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

Determine o valor exato de $P'(\theta)$

Comece por mostrar que $P'(\alpha) = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a 8. (8 × 5 pontos)	40 pontos
40 pontos	

GRUPO II

1.		
1.1.		15 pontos
1.2.		15 pontos
2.		
2.1.		15 pontos
2.2.		10 pontos
3.		15 pontos
4.		
4.1.		15 pontos
4.2.		15 pontos
5.		
5.1.		15 pontos
5.2.		15 pontos
6.		
6.1.		15 pontos
6.2.		15 pontos
		160 pontos

TOTAL **200 pontos**