

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO
SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 635) – 1ª FASE – 25 DE JUNHO 2013**

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	D	C	A	D	B	C	A
Versão 2	C	A	B	D	D	C	B	B

Grupo II

1.

1.1.

$$z_1 = \sqrt{2} + 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} + 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2}i = \sqrt{2}i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$$

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}}{\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}} = \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$$

$$w = \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^4 = \left(\operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \right)^4 = \operatorname{cis} \pi = -1$$

1.2.

$$z_3 + \overline{z_2} = \operatorname{cis} \alpha + 1 - i = \cos \alpha + 1 + (\sin \alpha - 1)i$$

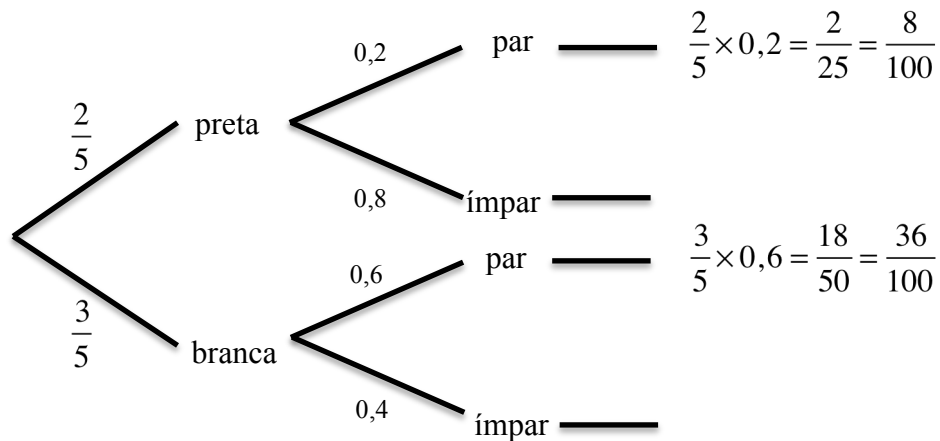
$$z_3 + \overline{z_2} \text{ é um número real se } \sin \alpha - 1 = 0. \text{ Como } \alpha \in]-2\pi, -\pi[\text{ então } \alpha = -\frac{3\pi}{2}.$$

2.

2.1.

Consideremos o seguinte diagrama em que:

preta é o acontecimento “a bola ser preta” e **branca** “a bola ser branca”. **par** “a bola ter um número par” e **ímpar** “a bola ter um número ímpar”.



Assim,

$$P(\text{preta} \mid \text{par}) = \frac{P(\text{preta e par})}{P(\text{par})} = \frac{\frac{8}{100}}{\frac{8}{100} + \frac{36}{100}},$$

pelo que a probabilidade dada é de $\frac{2}{11}$.

2.2.

A probabilidade de sair uma bola branca na primeira extração é igual a $\frac{3}{5}$ segundo os dados do problema. Como a extração é efetuada sem reposição, a probabilidade de sair uma bola branca na

segunda extração, sabendo que saiu bola branca na primeira extração é dada por: $\frac{\frac{3}{5}n-1}{n-1}$

Logo, a probabilidade de ambas as bolas serem brancas é dada por: $\frac{3}{5} \times \frac{\frac{3}{5}n-1}{n-1} = \frac{9}{5} \frac{n-3}{n-5}$.

Como se sabe que a probabilidade de ambas as bolas serem brancas é igual a $\frac{7}{20}$ tem-se:

$$\frac{9}{5} \frac{n-3}{n-5} = \frac{7}{20}. \text{ Resolvendo a equação obtém-se } n = 25.$$

3.

De $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{15}{16}$, temos sucessivamente que

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{15}{16} \Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) = \frac{15}{16} \Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) = \frac{15}{16} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{16}.$$

Atendendo a que se $P(B) = \frac{1}{4}$ então $P(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

De $P(A \cap \overline{B}) = \frac{7}{12}$, temos sucessivamente que

$$P(A \cap \overline{B}) = \frac{7}{12} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{7}{12} \Leftrightarrow P(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4 \times 3} \Leftrightarrow P(A \cap \overline{B}) = \frac{7}{16}.$$

Sabendo que $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$, então $P(A) = \frac{1}{16} + \frac{7}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

4.

4.1.

Como f é contínua no seu domínio só a reta de equação $x=0$ poderá ser assíntota vertical do gráfico de f . Para $x \in]-\infty, 0[$, f é contínua por ser o quociente entre duas funções contínuas e para $x \in]0, +\infty[$ f é contínua por ser o produto de duas funções contínuas. Assim, teremos que calcular:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{x} \times \frac{x}{e^{4x} - 1} \right) \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x}}_{\text{limite notável}=1} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^{4x} - 1} = 1 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{e^{4x} - 1}{x}} \\ &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4(e^{4x} - 1)}{4x}} = \frac{1}{4 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{limite notável}=1}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(x)) = \lim_{\substack{y=1 \\ y \rightarrow +\infty \\ x}} \frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{y} = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0$$

Concluimos, assim, que o gráfico da função f não tem assíntotas verticais.

4.2.

$g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$, substituindo $f(x)$ por $x \ln(x)$, temos $g(x) = x \ln(x) - x + \ln^2 x$.

Determinemos a primeira derivada da função g :

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x \ln(x))' + (\ln^2(x))' = 1 \times \ln(x) + \frac{x}{x} - 1 + 2 \ln(x) \times \frac{1}{x} \\ &= \ln(x) + \frac{2}{x} \ln(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right) \ln(x) \end{aligned}$$

Determinemos os zeros de g' no intervalo $]0, e]$:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{2}{x}\right) \ln(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} = 0 \vee \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1. \text{ No intervalo considerado}$$

$x = 1$ é o único zero de g' .

x	0	1		e
$g'(x)$	-	0	+	$1 + \frac{2}{e}$
$g(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1
		min		máx

A função g é estritamente decrescente em $]0, 1]$ e estritamente crescente em $[1, e]$.

g tem um mínimo relativo igual a -1 para $x = 1$ e um máximo relativo igual a 1 para $x = e$.

4.3.

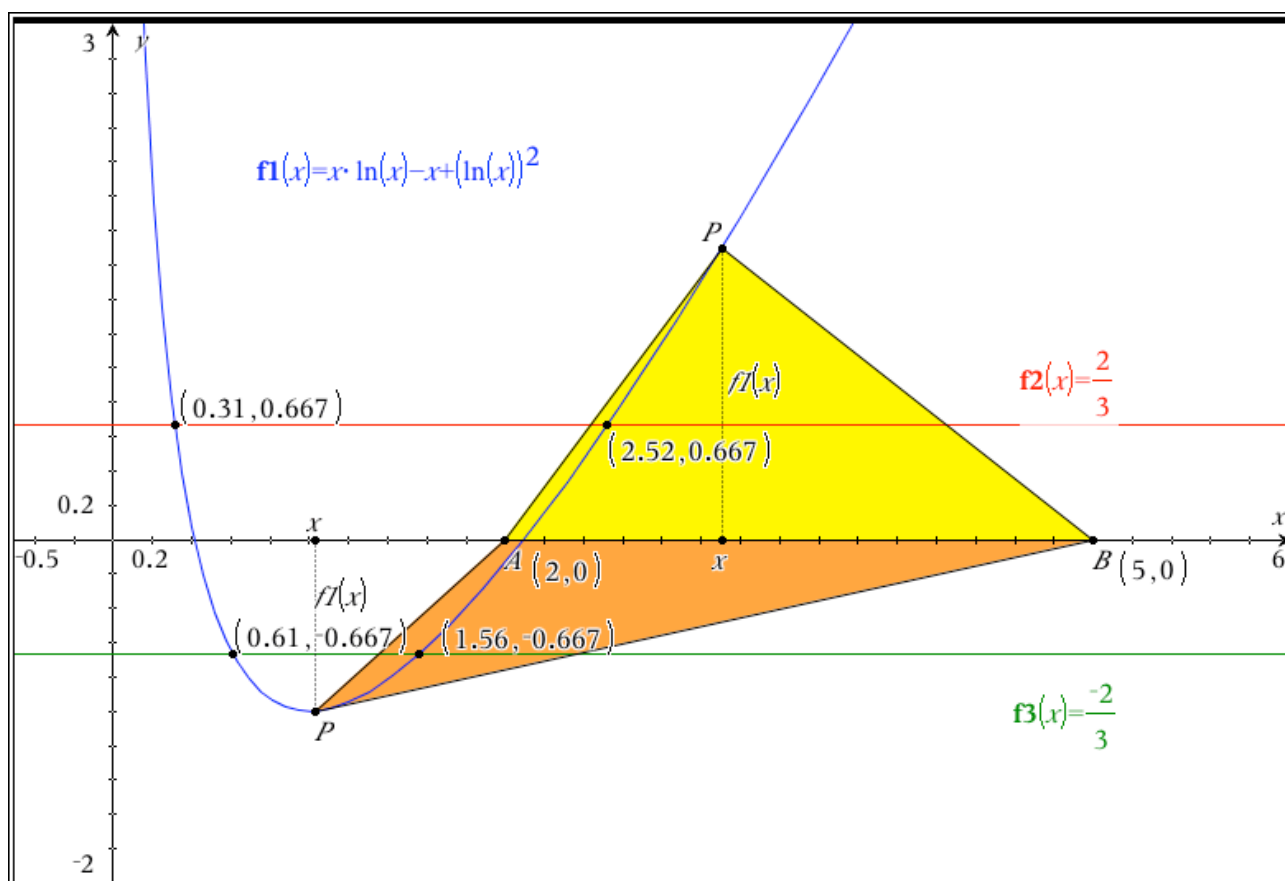
Pretendemos os valores de $x \in \mathbb{R}^+$, para os quais a área do triângulo $[ABP]$ é a 1. Assim, temos de

$$\text{determinar } x \text{ tal que } \frac{(5-2) \times |g(x)|}{2} = 1 \Leftrightarrow |g(x)| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow g(x) = \frac{2}{3} \vee g(x) = -\frac{2}{3}.$$

Com recurso à calculadora obteve-se os gráficos de g e das retas $y = \frac{2}{3}$ e $y = -\frac{2}{3}$.

Procurando os pontos de interseção do gráfico da função g com as retas $y = \frac{2}{3}$ e $y = -\frac{2}{3}$, vamos encontrar as soluções do problema.

Vejamos os gráficos:



Por observação do gráfico podemos afirmar que as abcissas dos pontos P, são:
 $x = 0,31 \vee x = 0,61 \vee x = 1,56 \vee x = 2,52$.

5.

Do enunciado da questão podemos construir a tabela de monotonia da função g :

Dado que $e^{-x} > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos que:

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

A opção que pode representar a função g é a IV.

Na opção I a representação gráfica não se adequa à situação descrita no ponto de abcissa -1 porque a derivada nesse ponto é negativa e de acordo com a tabela anterior $g'(-1) = 0$.

Rejeitamos a opção II porque apresenta um máximo relativo para $x = 2$ quando para este valor a função g tem um mínimo relativo, conforme pode ser constatado na tabela.

Por fim, a opção III é rejeitada porque $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 2] = 0$ o que significa que a reta de equação $y = 2$ é assíntota do gráfico de g , e nesta representação gráfica a assíntota é a reta de equação $y = -2$.

6.

Como a reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abscissa a é paralela à reta de equação $y = \frac{1}{2}x + 1$, então o seu declive é igual a $\frac{1}{2}$.

Dado que a derivada de uma função num ponto é igual ao declive da reta tangente ao gráfico nesse ponto, temos que determinar a tal que $g'(a) = \frac{1}{2}$.

Determinemos a expressão analítica da função derivada de g :

$$g'(x) = 2\cos(2x) + \sin(x).$$

Vamos, então, resolver a equação $g'(a) = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} g'(a) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 2\cos(2a) + \sin(a) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2(\cos^2(a) - \sin^2(a)) + \sin(a) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2(1 - \sin^2(a) - \sin^2(a)) + \sin(a) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2 - 4\sin^2(a) + \sin(a) - \frac{1}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow -4\sin^2(a) + \sin(a) + \frac{3}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow -8\sin^2(a) + 2\sin(a) + 3 = 0 \end{aligned}$$

Considerando $b = \sin(a)$, temos que $-8\sin^2(a) + 2\sin(a) - 3 = 0 \Leftrightarrow -8b^2 + 2b + 3 = 0$, aplicando a fórmula resolvente para equações do 2º grau temos:

$$\begin{aligned} -8b^2 + 2b - 3 = 0 &\Leftrightarrow b = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{-16} \\ &\Leftrightarrow b = \frac{-2 \pm 10}{-16} \\ &\Leftrightarrow b = \frac{12}{16} \vee b = \frac{8}{-16} \\ &\Leftrightarrow b = \frac{3}{4} \vee b = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Temos então que $\sin(a) = \frac{3}{4} \vee \sin(a) = -\frac{1}{2}$.

Como o domínio de g é $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, neste intervalo a função seno é negativa, pelo que a condição

$\sin(a) = \frac{3}{4}$ é impossível.

Assim, tem-se

$$\sin(a) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(a) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow a = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee a = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \text{ Como } a \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[,$$

o valor de a é igual $-\frac{\pi}{6}$.

7.

Consideremos a função g , definida por $g(x) = f(x) - f(x+a)$. Assim, $g(x) = 0$ é equivalente à condição dada, $f(x) = f(x+a)$.

A função g é contínua no intervalo $[-a, 0]$ por ser a diferença de duas funções contínuas nesse intervalo.

Averiguemos se $g(-a) \times g(0) < 0$.

$$g(-a) = f(-a) - f(0) = f(a) - f(0), \text{ pois } f(-a) = f(a);$$

$$g(0) = f(0) - f(a) = -f(a) + f(0) = -(f(a) - f(0))$$

$$\text{Como } f(a) > f(0) \Leftrightarrow f(a) - f(0) > 0 \Leftrightarrow g(-a) > 0.$$

$$\text{De igual modo } g(0) = -(f(a) - f(0)) < 0$$

Assim, concluímos que $g(-a) \times g(0) < 0$.

Como g é contínua no intervalo $[-a, 0]$ e $g(-a) \times g(0) < 0$, pelo Teorema de Bolzano, a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $] -a, 0[$, o que permite concluir que a condição $f(x) = f(x+a)$ tem, pelo menos, uma solução em $] -a, 0[$.

FIM