

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO
SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 635) – 2ª FASE – 18 DE JUNHO 2013**

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	C	A	D	B	A	C	A
Versão 2	A	D	B	B	C	A	D	C

Grupo II

1.

1.1.

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} + i^{22} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + (i^4)^5 \times i^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right), \text{ porque } |z_1| = 1$$

e um argumento de z_1 é $\frac{2\pi}{3}$.

$$z_2 = \frac{-2}{iz_1} = \frac{2 \operatorname{cis}(\pi)}{\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{2 \operatorname{cis}(\pi)}{\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$(z_2)^n = \left[2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right]^n = 2^n \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6} \times n\right)$$

$$(z_2)^n \text{ é um número real negativo quando } -\frac{\pi}{6} \times n = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = -6 - 12k, k \in \mathbb{Z}.$$

Fazendo concretizações de k , obtemos $n = 6$ para $k = -1$, sendo este o menor valor natural de n tal que $(z_2)^n$ é um número real negativo.

1.2.

$$\begin{aligned}\frac{\cos(\pi - \alpha) + i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos \alpha + i \sin \alpha} &= \frac{\cos(\pi - \alpha) + i \sin(\alpha)}{\cos \alpha + i \sin \alpha} \\ &= \frac{\cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha)}{\cos \alpha + i \sin \alpha} \\ &= \frac{\text{cis}(\pi - \alpha)}{\text{cis} \alpha} \\ &= \text{cis}(\pi - 2\alpha)\end{aligned}$$

E assim se concluiu o pretendido.

2.

Como B : "Sair número menor do que 3" então $\overline{B}$: "Sair número 3".

Sabe-se que $P(\overline{A \cup B}) - P(A \cap B) = \frac{5}{9}$, então

$$\begin{aligned}P(\overline{A \cup B}) - P(A \cap B) &= \frac{5}{9} \Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) - P(A \cap B) = \frac{5}{9} \\ &\Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) - P(A \cap B) = \frac{5}{9} \\ &\Leftrightarrow 1 - 2P(A \cap B) = \frac{5}{9} \\ &\Leftrightarrow -2P(A \cap B) = \frac{5}{9} - 1 \\ &\Leftrightarrow -2P(A \cap B) = -\frac{4}{9} \\ &\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{9}\end{aligned}$$

e que $P(B|A) = \frac{2}{7}$, então

$$\begin{aligned}P(B|A) = \frac{2}{7} &\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{7} \\ &\Leftrightarrow P(A) = \frac{P(A \cap B)}{\frac{2}{7}}.\end{aligned}$$

Dado que $P(A \cap B) = \frac{2}{9}$, temos:

$$P(A) = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{7}{9}} \Leftrightarrow P(A) = \frac{2}{7}.$$

Uma vez que, $A = \{1, 3\}$ e como $A \cap B = \{1\}$ e $\overline{B} = \{3\}$ são dois acontecimentos incompatíveis, então

$$P(A) = P(A \cap B) + P(\overline{B}) \text{ pelo que,}$$

$$\begin{aligned} P(\overline{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(\overline{B}) = \frac{7}{9} - \frac{2}{9} \\ &\Leftrightarrow P(\overline{B}) = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que a probabilidade de sair número 3 é $\frac{5}{9}$.

3.

3.1.

Do enunciado retiramos que a probabilidade de escolher, ao acaso, um jornalista e ele ser do sexo feminino é $\frac{3}{5}$. Como existem 20 jornalistas então, o número jornalistas do sexo feminino é dado por $\frac{3}{5} \times 20 = 12$, sendo os restantes 8 do sexo masculino.

Os valores da variável Y são: 0, 1 e 2.

Assim, a tabela de distribuição da variável Y é:

y_i	0	1	2
$P(Y = y_i)$	$\frac{{}^8C_2}{{}^{20}C_2} = \frac{14}{95}$	$\frac{{}^8C_1 \times {}^{12}C_1}{{}^{20}C_2} = \frac{48}{95}$	$\frac{{}^{12}C_2}{{}^{20}C_2} = \frac{33}{95}$

3.2.

Pretende-se determinar o número de maneiras diferentes dos 20 jornalistas se sentarem nas três primeiras filas, ocupando completamente a 1ª e a 2ª filas.

Resposta I): $\left[{}^{20}C_{16} \times 16! \times {}^8A_4 \right]$

Existem ${}^{20}C_{16}$ maneiras diferentes de formar grupos de 16 jornalistas, de entre os 20, para ocuparem as duas primeiras filas. Para cada grupo de 16 jornalistas existem $16!$ maneiras de ocuparem os 16 lugares nas duas primeiras filas. Restam 4 jornalistas que têm disponíveis 8

cadeiras na 3ª fila. Há 8A_4 maneiras diferentes dos restantes 4 jornalistas se sentarem, ordenadamente, em 4 cadeiras de entre as 8 disponíveis.

Existem, assim, ao todo, ${}^{20}C_{16} \times 16! \times {}^8A_4$ formas diferentes dos 20 jornalistas se sentarem, nas três primeiras filas, nas condições do enunciado.

Resposta II): $\left[{}^{20}A_8 \times {}^{12}A_8 \times {}^8A_4 \right]$

Existem ${}^{20}A_8$ maneiras diferentes de se sentarem, ordenadamente, 8 jornalistas escolhidos entre os 20, na primeira fila. Sentados 8 jornalistas, restam 12, sendo que 8 destes deverão ocupar completamente a 2ª fila. Existem ${}^{12}A_8$ formas diferentes dos 8 jornalistas, escolhidos de entre os 12, ocuparem as 8 cadeiras da 2ª fila. Ocupadas as duas primeiras filas, restam 4 jornalistas para os quais há 8A_4 formas diferentes de se sentarem ordenadamente em 4 cadeiras das 8 que constituem a 3ª fila.

Existem, assim, ao todo, ${}^{20}A_8 \times {}^{12}A_8 \times {}^8A_4$ formas diferentes dos 20 jornalistas se sentarem, nas três primeiras filas, de acordo com o enunciado.

4.

4.1.

A função f é contínua em $x = 1$ se e só se $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$.

Começemos por calcular os limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (xe^{3+x} + 2x) = e^4 + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \sqrt{x} + \operatorname{sen}(x-1)}{1-x}.$$

Atendendo a que o limite da soma é igual à soma dos limites das parcelas, quando estes existem, averiguemos se estes existem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \sqrt{x}}{1-x} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(1-x)(1 + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{(1-x)(1 + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(x-1)}{1-x} = -\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(x-1)}{x-1}.$$

Considerando $y = x - 1$, quando $x \rightarrow 1^+$ então $y \rightarrow 0^+$ e assim,

$$-\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = -\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin y}{y} = -1$$

Como os limites das parcelas existem, então,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \sqrt{x} + \sin(x-1)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \sqrt{x}}{1-x} + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(x-1)}{1-x} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Donde concluímos que f não é contínua em $x = 1$ porque os limites laterais são diferentes.

4.2.

O gráfico de f admite uma assíntota de equação $y = mx + b$, quando $x \rightarrow -\infty$, se existirem m e b finitos.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{3+x} + 2x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(e^{3+x} + 2)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{3+x} + 2) \\ &= 2, \text{ porque } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3+x} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{3+x} + 2x - 2x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{3+x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^3}{e^{-x}}, \text{ fazendo } y = -x, \text{ vem } y \rightarrow +\infty \text{ quando } x \rightarrow -\infty \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^3}{-e^y} \\ &= 0, \text{ dado que } \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty. \end{aligned}$$

O gráfico de f admite uma assíntota oblíqua de equação $y = 2x$, quando $x \rightarrow -\infty$.

5.

Para efetuar o estudo das concavidades do gráfico de g determinemos a expressão analítica da segunda derivada de g .

$$\begin{aligned} g''(x) &= \left(\ln(e^x + 6e^{-x} + 4x) \right)' \\ &= \frac{(e^x + 6e^{-x} + 4x)'}{e^x + 6e^{-x} + 4x} \\ &= \frac{e^x - 6e^{-x} + 4}{e^x + 6e^{-x} + 4x} \end{aligned}$$

Como $x \in \mathbb{R}^+$ então, $e^x + 6e^{-x} + 4x > 0$

Calculem-se os zeros da segunda derivada de g :

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\Leftrightarrow e^x - 6e^{-x} + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} + 4e^x - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2} \\ &\Leftrightarrow e^x = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{2} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{e^x = -2 - \sqrt{10}}_{\text{impossível}} \vee e^x = -2 + \sqrt{10} \\ &\Leftrightarrow e^x = -2 + \sqrt{10} \\ &\Leftrightarrow x = \ln(-2 + \sqrt{10}) \end{aligned}$$

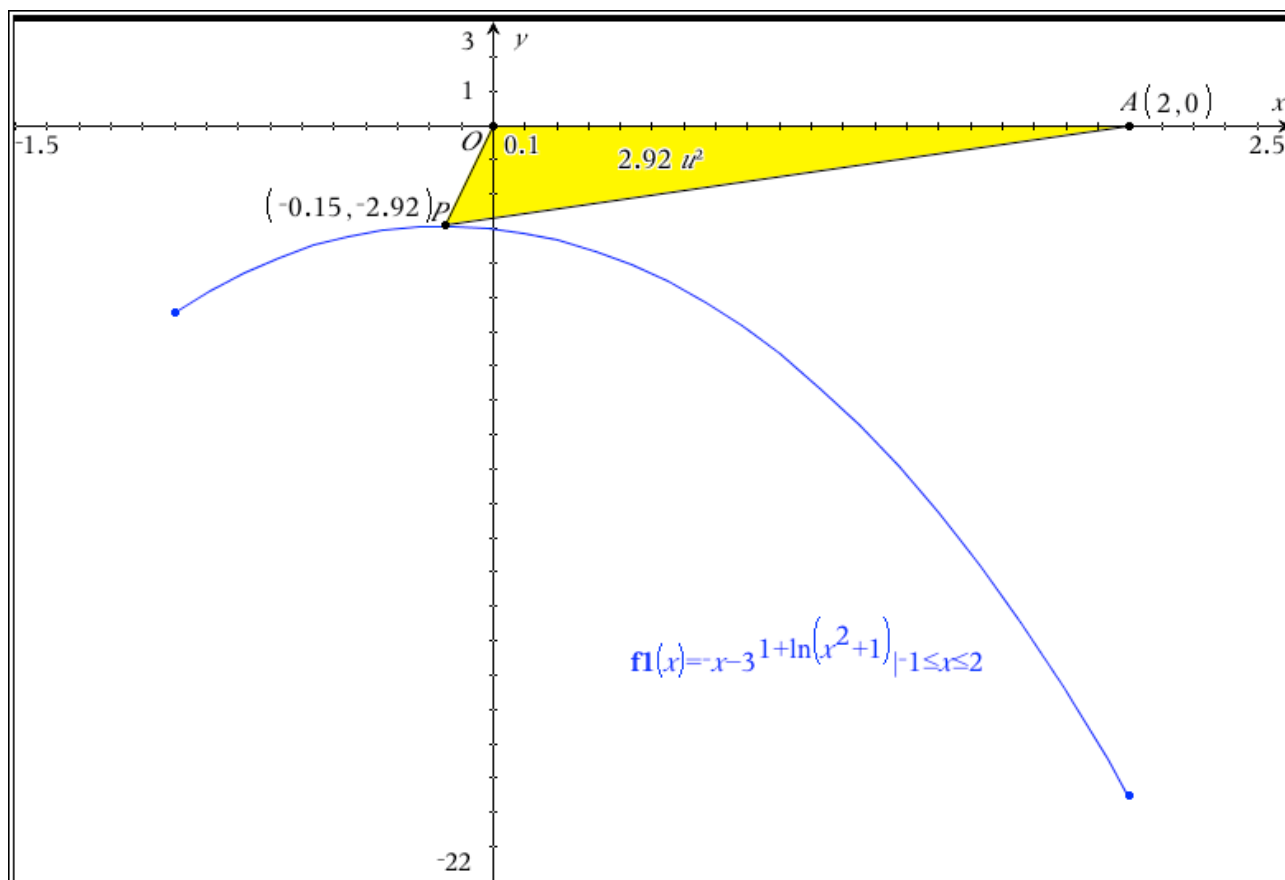
x	0		$\ln(-2 + \sqrt{10})$	$+\infty$
$g''(x)$	n.d.	-	0	+
$g(x)$	n.d.	$\cap$	P.I.	$\cup$

Por observação da tabela, conclui-se que o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]0, \ln(-2 + \sqrt{10})]$ e voltada para cima em $[\ln(-2 + \sqrt{10}), +\infty[$.

O gráfico de f tem um ponto de inflexão de abcissa $\ln(-2 + \sqrt{10})$.

6.

Consideremos a representação gráfica de f definida por $f(x) = -x - 3^{1+\ln(x^2+1)}$ no intervalo $[-1, 2]$.



A área do triângulo $[AOP]$ é mínima quando a altura do triângulo, relativamente à base $[OA]$, for mínima, o que acontece quando a ordenada do ponto P for o máximo de f , no intervalo $[-1, 2]$.

Por observação do gráfico de f , sabemos que o seu máximo é -2.92

Assim, porque a área do triângulo $[AOP]$ é dada por $A_{[AOP]} = \frac{\overline{OA} \times |f(x)|}{2} = \frac{2 \times |f(x)|}{2} = |f(x)|$ a área mínima é 2.92

7.

7.1.

Tendo em conta os dados da figura tem-se que,

$$P_{[OAB]} = 2\overline{OA} + \overline{AB}$$

Determine-se $\overline{OA}$,

$$\begin{aligned}\cos(\pi - \alpha) &= \frac{3}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{3}{\cos(\pi - \alpha)} \\ \Leftrightarrow \overline{OA} &= \frac{3}{-\cos(\alpha)} \\ \Leftrightarrow \overline{OA} &= -\frac{3}{\cos(\alpha)}\end{aligned}$$

e $\overline{AC}$,

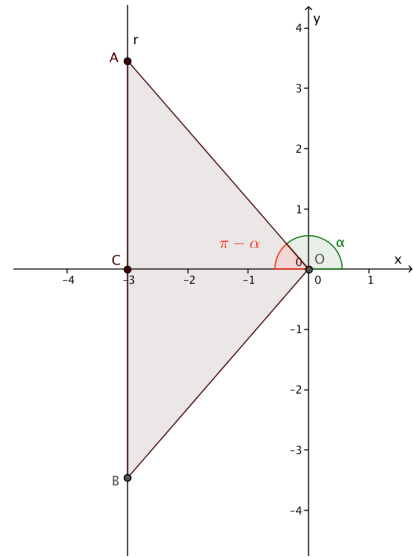
$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\pi - \alpha) &= \frac{\overline{AC}}{3} \Leftrightarrow \overline{AC} = 3\operatorname{tg}(\pi - \alpha) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{AC} &= -3\operatorname{tg}(\alpha)\end{aligned}$$

Pelo que, $\overline{AB} = 2 \times (-3\operatorname{tg}(\alpha)) = -6\operatorname{tg}(\alpha)$.

Assim,

$$\begin{aligned}P_{[OAB]} &= \overline{AB} + 2\overline{OA} = \\ &= -6\operatorname{tg}(\alpha) + 2 \times \left(-\frac{3}{\cos(\alpha)} \right) = \\ &= -6\operatorname{tg}(\alpha) - \frac{6}{\cos(\alpha)}\end{aligned}$$

Então, $P(\alpha) = -6\operatorname{tg}(\alpha) - \frac{6}{\cos(\alpha)}$, $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \pi \right[$.



7.2.

O declive da reta tangente ao gráfico da função P é igual à derivada da função P no ponto de abscissa $\frac{5\pi}{6}$.

Assim, determine-se a derivada da função P ,

$$\begin{aligned}P'(x) &= \left(-6\operatorname{tg}(x) - \frac{6}{\cos(x)} \right)' \\&= (-6\operatorname{tg}(x))' - \left(\frac{6}{\cos(x)} \right)' \\&= -6 \times \frac{1}{\cos^2(x)} - \left(\frac{-6 \times (\cos(x))'}{\cos^2(x)} \right) \\&= -6 \times \frac{1}{\cos^2(x)} - \left(\frac{+6 \times \operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} \right) \\&= \frac{-6 - 6\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}\end{aligned}$$

Logo,

$$P'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-6 - 6\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{-6 - 6 \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{-9}{\frac{3}{4}} = -12$$

Pelo que se conclui que o declive da reta tangente ao gráfico da função P , no ponto de abscissa $\frac{5\pi}{6}$, é -12 .

FIM