12MatA_1_prop_2013-2014

Grupo I

	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	**C**	**A**	**C**	**B**	**B**	**D**	**C**	**D**
Versão 2	**B**	**D**	**B**	**C**	**B**	**C**	**A**	**C**

Grupo II

1.

1.1

C.A. 1

$$z_1 = \frac{\left(2cis\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)^3}{\sqrt{2}cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{8cis(2\pi)}{\sqrt{2}cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = 4\sqrt{2}cis\left(\frac{9}{4}\pi\right) = 4\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

C.A. 2

$w = -1 + \sqrt{3}\,i$ $\qquad (-1, \sqrt{3}) \in 2.^{\text{o}}Q$

$|w| = 2$

$$tg\,\theta = -\sqrt{3} \Leftrightarrow tg\,\theta = tg\left(\frac{2}{3}\pi\right) \Leftrightarrow \theta = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in Z$$

C.A. 3

$v = 1 - i$ $\qquad (1, -1) \in 4.^{\text{o}}Q$

$|v| = \sqrt{2}$

$$tg\,\theta = -1 \Leftrightarrow tg\,\theta = tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z$$

$$z_1 \times (z_2)^2 = 4\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right) \times cis(2\alpha) = = 4\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)$$

Para que $z_1 \times (z_2)^2$ seja um imaginário puro é necessário que:

$$\frac{\pi}{4} + 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z \Leftrightarrow \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z$$

Dado que $\alpha \in [0, \pi[$ temos:

$Se\ \ k = 0 \quad \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8}$

$Se\ \ k = 1 \quad \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{8}$

Resposta: $\frac{\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{8}$.

1.2

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2 \leq 10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |z + 1|^2 + |z - 1|^2 \leq 10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right)^2 \leq 10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 \leq 8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |z|^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow |z| \leq 2$$

2.

$$9\ bolas \begin{cases} 6\ pretas \\ 2\ brancas \\ 1\ amarela \end{cases}$$

2.1

P("não terem todas a mesma cor") = 1 – P("as três retiradas são pretas") =

$= 1 - \frac{^6C_3}{^9C_3} = \frac{16}{21}$

2.2

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{84}$

$$\sum P(X = x_i) = 1$$

$$P(X = 1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$P(X = 2) = \frac{3 \times 6}{9 \times 8} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=3)=\frac{3\times2\times6}{9\times8\times7}=\frac{1}{14}$$
$$P(X=4)=\frac{3\times2\times1\times6}{9\times8\times7\times6}=\frac{1}{84}$$

3.

No contexto do problema:

P(A|B) significa a probabilidade do número registado no 1.º lançamento ser negativo sabendo que o produto dos números registados nos dois lançamentos é positivo.
Nos casos possíveis temos que considerar duas situações: saírem nos dois lançamentos dois números positivos **ou** dois números negativos. Assim o número de casos possíveis é igual a $3^2+1^2=10$.
Nos casos favoráveis como tem que sair número negativo no primeiro lançamento, ou seja , – 1 obrigatoriamente para que o produto seja positivo no segundo lançamento tem que sair número negativo , ou seja, – 1. Assim o único caso possível é $(-1,-1)$.

$\therefore \quad P(A|B)=\frac{1}{10}$

4.

$$\vec{u}=\vec{HA} \qquad A(3,0,0)$$
$$\vec{v}=\vec{HC} \qquad C(0,-3,0)$$

$$\vec{u}=\vec{HA}=A-H=$$
$$=(3,0,0)-(3,-2,3)=$$
$$=(0,2,-3)$$
$$\vec{v}=\vec{HC}=C-H=$$
$$=(0,-3,0)-(3,-2,3)=$$
$$=(-3,-1,-3)$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=$$
$$=\frac{(0,2,-3)\cdot(-3,-1,-3)}{\sqrt{2^2+3^2}\times\sqrt{3^2+1^2+3^2}}=$$
$$=\frac{-2+9}{\sqrt{13}\times\sqrt{19}}=\frac{7}{\sqrt{247}}$$
$$\therefore \quad sen^2\alpha=1-\cos^2\alpha=$$
$$=1-\frac{49}{247}=\frac{198}{247}$$

5.

5.1

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{e^{x-4}-3x+11}{4-x}\underset{y=x-4}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}-\lim_{y\to 0^-}\frac{e^{y}-3(y+4)+11}{y}=-\lim_{y\to 0^-}\frac{e^{y}-1-3y}{y}=$$

$$=-\left(\lim_{y\to 0^-}\frac{e^{y}-1}{y}-\lim_{y\to 0^-}\frac{3y}{y}\right)=-(1-3)=2$$

$$\lim_{y\to 4^+}\ln\left(2e^{x}-e^{4}\right)=\ln e^{4}=4$$

Como $\lim_{x\to 4^-} f(x) \neq \lim_{y\to 4^+} f(x)$, logo f não é contínua em x = 4.

5.2

$$b=\lim_{y\to+\infty}\left\lfloor \ln\left(2e^{x}-e^{4}\right)-x\right\rfloor \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim_{y\to+\infty}\left\lfloor \ln\left(e^{x}\left(2-e^{4-x}\right)\right)-x\right\rfloor=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left\lfloor \ln e^{x}+\ln\left(2-e^{4-x}\right)-x\right\rfloor=\lim_{y\to+\infty}\left\lfloor x+\ln\left(2-e^{4-x}\right)-x\right\rfloor=$$

$$=\ln(2-0)=\ln 2$$

$$b=\ln 2$$

6. $\quad f'(x)=x-sen(2x)$

6.1

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x-\pi}=\frac{1}{2}\lim_{y\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\times f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-sen\pi\right)=\frac{\pi}{4}$$

6.2

$$f'(x)=x-sen(2x), \forall x\in IR \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)=1-2\cos(2x), \forall x\in IR$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \cos(2x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in Z \vee 2x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in Z \vee x=-\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in Z$$

Em $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right[: x=-\frac{\pi}{6} \vee x=\frac{\pi}{6}$ (para k = 0)

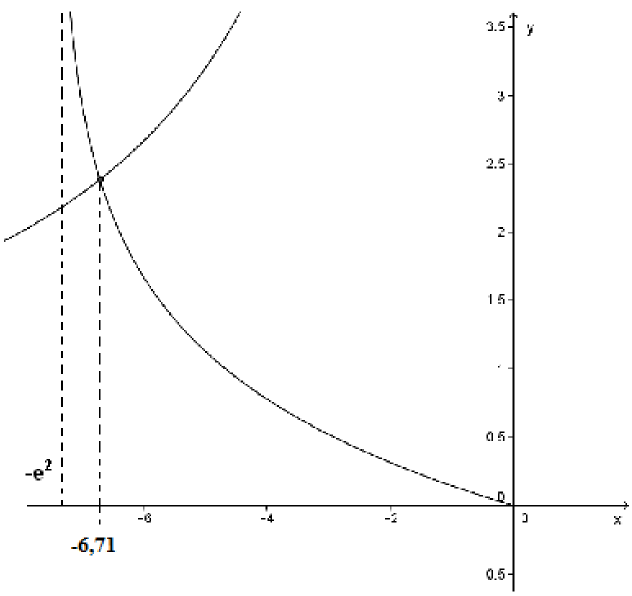
x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
f''		+	0	-	0	+	
f		$\cup$	P. I.	$\cap$	P. I.	$\cup$	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right[$ e em $\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right[$; $x=-\frac{\pi}{6}$ e $x=\frac{\pi}{6}$ são as abcissas dos pontos de inflexão.

7)

$$A(x)=\frac{(2-\ln(x+e^2))(-x)}{2}, \; -e^2<x<0$$

$$A(x)=8 \Leftrightarrow 2-\ln(x+e^2)=-\frac{16}{x}, \; -e^2<x<0 \Leftrightarrow x\approx -6{,}71$$



No referêncial estão representados os gráficos das funções

$y_1=2-\ln\left(x+e^2\right)$ e

$y_2=-\frac{16}{x}$

cujo ponto de interseção corresponde à solução da equação dada.