

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO

SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 635) – 2ª FASE – 21 DE JULHO 2014

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	B	B	D	C	A	B	C
Versão 2	B	C	C	A	B	A	D	D

Grupo II

1.

1.1. O complexo z , na forma algébrica, é dado por :

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i$$

e o seu conjugado $\bar{z} = \sqrt{3} - i$.

A imagem geométrica do complexo $\bar{z}$ é o ponto A de coordenadas $(\sqrt{3}, -1)$.

Substituindo z na expressão de w e simplificando vem:

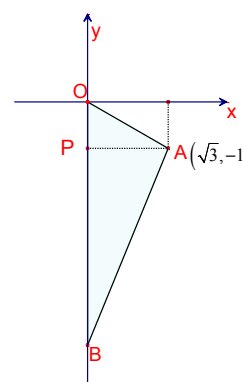
$$w = \frac{(\sqrt{3} + i - i)^4}{1 + i(\sqrt{3} + i)} = \frac{(\sqrt{3})^4}{1 + \sqrt{3}i - 1} = \frac{9}{\sqrt{3}i} = \frac{9 \times (-i)}{\sqrt{3}i \times (-i)} = \frac{-9i}{\sqrt{3}} = -3\sqrt{3}i$$

Então, a imagem geométrica do complexo w é o ponto B de coordenadas $(0, -3\sqrt{3})$.

Na figura, está representado o triângulo $[AOB]$, sendo $[AP]$ a sua altura relativamente à base $[OB]$.

Assim, a área do triângulo $[AOB]$ é dada por:

$$A_{[AOB]} = \frac{\overline{OB} \times \overline{AP}}{2} = \frac{|-3\sqrt{3}| \times \sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}$$



1.2. A equação dada é uma equação do 2º grau em $z \in \mathbb{C}$.

Aplicando a fórmula resolvente vem:

$$\begin{aligned} z^2 - 2\cos\alpha z + 1 &= 0 \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm 2\sqrt{\cos^2\alpha - 1}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = \frac{2(\cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1})}{2} \Leftrightarrow z = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} \Leftrightarrow z = \cos\alpha \pm \sqrt{-\sin^2\alpha} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = \cos\alpha \pm \sqrt{i^2 \times \sin^2\alpha} \Leftrightarrow z = \cos\alpha \pm i\sin\alpha \Leftrightarrow z = \cos\alpha + i\sin\alpha \vee z = \cos\alpha - i\sin\alpha \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = \operatorname{cis}\alpha \vee z = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha) \Leftrightarrow z = \operatorname{cis}\alpha \vee z = \operatorname{cis}(-\alpha) \end{aligned}$$

As soluções da equação, em função de α , são: $z = \operatorname{cis}\alpha$ e $z = \operatorname{cis}(-\alpha)$.

2.

2.1. Dado o acontecimento B : "As duas bolas azuis ficam uma ao lado da outra" determinemos a probabilidade de B , $P(B)$.

Atendendo a que a extração das bolas é sucessiva e sem reposição, o número de casos possíveis é dado por $6!$.

Casos favoráveis à ocorrência de B : se considerarmos que as duas bolas azuis constituem um bloco, existem $5!$ modos diferentes de permutar esse bloco das bolas azuis com as restantes 4 bolas pretas. Para cada uma dessas maneiras existem $2!$ formas diferentes das bolas azuis permutarem entre si. Assim, existem $5 \times 2!$ casos favoráveis.

$$\text{Então, } P(B) = \frac{5 \times 2!}{6!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Conclui-se então que a probabilidade pedida é $\frac{1}{3}$.

2.2.

Do enunciado retiramos que os valores da variável X são: 0, 1 e 2.

Determinemos a probabilidade de cada um dos valores da variável:

$$P(X=0) = \frac{C_3^4}{C_3^6} = \frac{1}{5}$$

$$P(X=1) = \frac{2 \times C_2^4}{C_3^6} = \frac{3}{5}$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 \times C_1^4}{C_3^6} = \frac{1}{5}$$

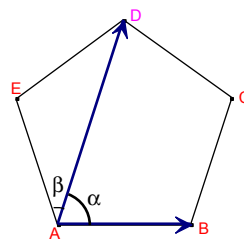
Assim, a tabela da distribuição de probabilidade da variável X é:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

3. Designemos por α a amplitude do ângulo dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.

Pela definição de produto escalar de dois vetores tem-se:

$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AD}\| \cdot \cos \alpha}{\|\overrightarrow{AD}\|} = \cos \alpha \quad (*)$$



Determinemos o valor de α :

A medida da amplitude, em radianos, de cada ângulo interno de um polígono regular é dada por

$\frac{(n-2)\pi}{n}$, sendo n o número de lados do polígono. Fazendo $n=5$ obtemos a medida da

amplitude de cada um dos ângulos internos do pentágono regular, ou seja, $\frac{3}{5}\pi$.

Como o triângulo $[AED]$ é isósceles e num triângulo isósceles a lados iguais opõem-se ângulos

iguais, tem-se: $\pi = \frac{3\pi}{5} + 2\beta$, sendo $\beta = \widehat{DAE} = \widehat{ADE}$.

$$\text{Assim, } \pi = \frac{3\pi}{5} + 2\beta \Leftrightarrow \pi - \frac{3\pi}{5} = 2\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{\frac{2\pi}{5}}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{5}$$

$$\text{Ora, } \alpha + \beta = \frac{3}{5}\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{5}\pi - \beta \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{5}\pi - \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{5}\pi$$

Substituindo em (*) o valor de α e aplicando a fórmula de duplicação do co-seno de um ângulo e a fórmula fundamental da trigonometria, vem:

$$\cos \alpha = \cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{5}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{5} - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{5} = 1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{5} - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{5} = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{5}$$

Conclui-se assim que $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|} = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{5}$

4.

4.1.

Assíntotas verticais

Como a função f é contínua no seu domínio, apenas a reta de equação $x=0$ poderá ser assíntota vertical do gráfico de f .

Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x} \right) = 0 - 1 + (-\infty) \times \frac{1}{0^-} = -1 + (-\infty) \times (-\infty) = +\infty.$$

Conclui-se assim que a reta de equação $x=0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f .

Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1 + \frac{\ln(-x)}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln(-x)}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \times \frac{\ln(-x)}{x} \right) = \\ &= 1 - 0 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \times \frac{\ln(-x)}{x} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \times \frac{\ln(-x)}{x} \right) \quad (**)\end{aligned}$$

Façamos a mudança de variável: $y = -x \Leftrightarrow x = -y$.

Como $x \rightarrow -\infty$ então $y \rightarrow +\infty$ e assim,

$$(**) \quad 1 - 0 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \times \frac{\ln(-x)}{x} \right) = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{-y} \times \frac{\ln y}{-y} \right) = 1 + 0 \times 0 = 1$$

$$\text{Então, } m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-1 + \frac{\ln(-x)}{x} \right] =$$

$$\stackrel{(a)}{=} -1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln y}{-y} \right) = -1 - 0 = -1$$

(a) Mudança de variável: $-x = y$. Como $x \rightarrow -\infty$ então $y \rightarrow +\infty$.

$$\text{Então, } b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = -1$$

Portanto a reta de equação $y = x - 1$ é uma assíntota não vertical do gráfico de f quando x tende para $-\infty$. Não pode haver outras assíntotas não verticais porque o domínio de f é limitado superiormente.

O gráfico de f admite como assíntotas as retas de equações $x = 0$ e $y = x - 1$.

Outra resolução:

Temos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x} \right)$$

Façamos a mudança de variável: $y = -x \Leftrightarrow x = -y$. Como $x \rightarrow -\infty$ então $y \rightarrow +\infty$ e assim,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\ln(-x)}{x} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln y}{-y} \right) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln y}{y} \right) = 0$$

Então, por definição de assíntota, a reta de equação $y = x - 1$ é uma assíntota não vertical do gráfico de f quando x tende para $-\infty$.

4.2. A função f é contínua no seu domínio $]-\infty, 0[$, por ser a soma de duas funções contínuas, logo f é contínua em $[-e, -1] \subset]-\infty, 0[$.

$$f(-e) = -e - 1 + \frac{\ln e}{-e} = -e - 1 - \frac{1}{e}, \text{ sendo } f(-e) \approx -4,086$$

$$f(-1) = -1 - 1 + \frac{\ln 1}{-1} = -2$$

Ora, $f(-e) < -e < f(-1)$.

Como f é contínua em $[-e, -1]$ e $f(-e) < -e < f(-1)$, o Teorema de Bolzano permite concluir que a equação $f(x) = -e$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]-e, -1[$.

4.3. A função g tem domínio $]-\infty, 0[$ e é definida pela expressão analítica $g(x) = -1 + \frac{\ln(-x)}{x}$,

$$\text{pois } g(x) = -x + f(x) = -x + x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x} = -1 + \frac{\ln(-x)}{x}.$$

Para estudar a função g quanto à monotonia e existência de extremos, determinemos a expressão analítica da primeira derivada de g .

$$g'(x) = (-1)' + \frac{[\ln(-x)]' \times x - x' \times \ln(-x)}{x^2} = \frac{\frac{-1}{-x} \times x - \ln(-x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(-x)}{x^2}, \quad D_{g'} =]-\infty, 0[$$

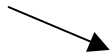
Zeros de g' :

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 \wedge x \in D_{g'} &\Leftrightarrow \frac{1 - \ln(-x)}{x^2} = 0 \wedge x \in D_{g'} \Leftrightarrow \ln(-x) = 1 \wedge x \in D_{g'} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x = e \wedge x \in D_{g'} \Leftrightarrow x = -e \end{aligned}$$

Sinal de g' :

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 \wedge x \in D_{g'} &\Leftrightarrow \frac{1 - \ln(-x)}{x^2} > 0 \wedge x \in D_{g'} \Leftrightarrow 1 - \ln(-x) > 0 \wedge x \in D_{g'} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln(-x) < 1 \wedge x \in D_{g'} \Leftrightarrow \ln(-x) < \ln e \wedge x \in D_{g'} \Leftrightarrow -x < e \wedge x \in D_{g'} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x > -e \wedge x \in D_{g'} \Leftrightarrow x \in]-e, 0[\end{aligned}$$

Tabela

x	$-\infty$	$-e$		0
g'	$-$	0	$+$	n.d.
g		$g(-e)$		n.d.

Por observação da tabela, conclui-se que a função g é estritamente crescente em $[-e, 0[$ e estritamente decrescente em $] -\infty, -e]$.

A função g tem um mínimo relativo para $x = -e$ que é $g(-e)$.

5. Começamos por observar que $[PQR]$ e $[PSR]$ são triângulos retângulos em Q e S , respetivamente, pois são triângulos inscritos numa semicircunferência.

Como o lado $[PR]$, comum a ambos, é um diâmetro e $\overline{PQ} = \overline{PS}$ os triângulos retângulos $[PQR]$ e $[PSR]$ são geometricamente iguais e têm $[PR]$ por hipotenusa.

Então, a área do quadrilátero $[PQRS]$ é dada por:

$$A_{[PQRS]} = 2 \times A_{[PQR]} = 2 \times \frac{\overline{PQ} \times \overline{QR}}{2} = \overline{PQ} \times \overline{QR}$$

Tem-se, assim:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{\overline{PQ}}{4} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 4 \cos(\alpha)$$

$$\text{e } \sin(\alpha) = \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{\overline{QR}}{4} \Leftrightarrow \overline{QR} = 4 \sin(\alpha).$$

Portanto, a área do quadrilátero $[PQRS]$ é dada, em função de α , por:

$$A(\alpha) = 4 \cos(\alpha) \times 4 \sin(\alpha) = 16 \sin(\alpha) \cos(\alpha).$$

Então, $A(\theta) = 16 \sin(\theta) \cos(\theta)$.

Determinemos agora o valor exato de $A(\theta)$.

Como $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ e $\tan \theta = 2\sqrt{2}$ tem-se:

$$1 + (2\sqrt{2})^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 1 + 8 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{9}.$$

Como $\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, $\cos \theta > 0$ e consequentemente $\cos \theta = \frac{1}{3}$.

Recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria podemos então escrever:

$$\sin^2 \theta + \frac{1}{9} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin^2 \theta = \frac{8}{9}.$$

Como $\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, $\sin \theta > 0$ e consequentemente $\sin \theta = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Logo o valor exato de $A(\theta)$ é: $A(\theta) = 16 \sin(\theta) \cos(\theta) = 16 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{9}$.

6. Começemos por determinar as coordenadas dos pontos A e B .

A é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo das ordenadas, pelo que as suas coordenadas são $(0, f(0))$.

Tem-se: $f(0) = -e^0 + 0^2 + 8 = -1 + 8 = 7$. Assim, o ponto A tem coordenadas $(0, 7)$.

Designando por x a abcissa do ponto B , as suas coordenadas são $(x, f(x))$, ou seja, o ponto B tem coordenadas $\left(x, -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8\right)$.

Assim, o declive da reta AB é dado, em função de x , por $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 - 7}{x}$.

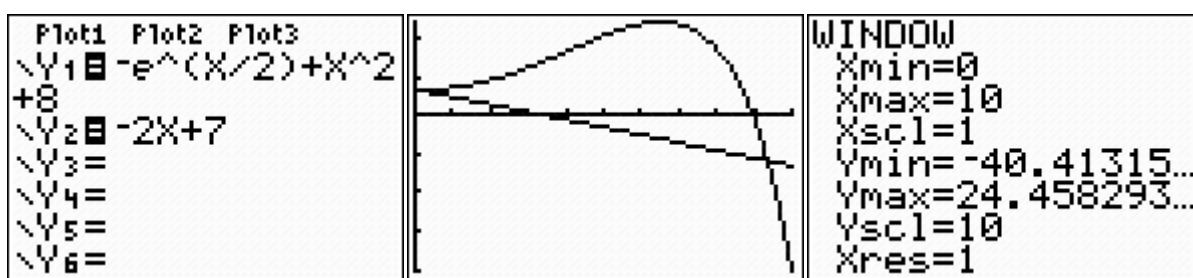
Como a reta AB tem declive -2 a abcissa do ponto B é a solução da equação

$$\frac{-e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 - 7}{x} = -2, \text{ no intervalo }]0, 10].$$

Como $x > 0$ tem-se:

$$\frac{-e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 - 7}{x} = -2 \Leftrightarrow -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 - 7 = -2x \Leftrightarrow -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 = -2x + 7$$

Com o objetivo de resolver a equação $-e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 = -2x + 7$, com recurso à calculadora gráfica, obteve-se o gráfico da função f definida por $f(x) = -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8$ e a reta de equação $y = -2x + 7$ (reta AB).



O valor de x que verifica a equação $-e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 = -2x + 7$, no intervalo $]0, 10]$, é aproximadamente 9,35.

A abcissa do ponto B é então $x \approx 9,35$.

7.

Afirmações:

I) A função h tem dois extremos relativos.

Determinemos os zeros de h' , primeira derivada da função h .

Como o domínio de h' é $\mathbb{R}$ tem-se:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{2x}} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3.$$

Estudemos o sinal de h' .

Como $e^{2x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ o sinal de h' só depende do sinal da função f .

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
h'	$+$	0	$+$	0	$-$
h	$\nearrow$	$h(-2)$	$\nearrow$	$h(3)$	$\searrow$

Por observação do quadro concluímos que a função h é estritamente crescente em $]-\infty, 3]$ e estritamente decrescente em $[3, +\infty[$, pelo que $h(3)$ é o único extremo relativo de h . Assim, a primeira afirmação é falsa.

II) $h''(-2) = 0$

Para calcular $h''(-2)$ determinemos a expressão analítica da segunda derivada de h .

$$\begin{aligned} h''(x) &= \left(\frac{f(x)}{e^{2x}} \right)' = \frac{f'(x) \times e^{2x} - f(x) \times (e^{2x})'}{(e^{2x})^2} = \frac{f'(x) \times e^{2x} - f(x) \times (2x)' \times e^{2x}}{e^{4x}} = \\ &= \frac{f'(x) \times e^{2x} - f(x) \times 2e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{e^{2x}(f'(x) - 2f(x))}{e^{4x}} = \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} \end{aligned}$$

Então,

$$h''(-2) = \frac{f'(-2) - 2f(-2)}{e^{-4}}.$$

Como a função f é derivável em $\mathbb{R}$ e tem um extremo relativo em $x = -2$ então $f'(-2) = 0$.

Tem-se que $f(-2) = 0$ pois -2 é um zero de f .

$$\text{Portanto, } h''(-2) = \frac{f'(-2) - 2f(-2)}{e^{-4}} = \frac{0 - 2 \times 0}{e^{-4}} = 0.$$

Assim, a segunda afirmação é verdadeira.

III) $y + 3 = 0$ é uma equação da assíntota do gráfico da função h quando x tende para $+\infty$

Dado que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 3$ concluímos que $y = 3$ é uma equação da assíntota do gráfico da função h quando x tende para $+\infty$, isto é, a reta de equação $y - 3 = 0$ é assíntota do gráfico da função h quando x tende para $+\infty$.

Assim, a terceira afirmação é falsa.

FIM