

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 635) – 1ª FASE – 23 DE JUNHO 2015

Grupo I

1.

Os dois rapazes devem estar sentados nas extremidades do banco. Há 2 maneiras de isso acontecer. As 4 raparigas podem estar sentadas nos 4 lugares do meio. Há 4! maneiras de elas se sentarem.

Logo: $2 \times 4! = 48$

A opção correta é:

Versão 1	(C)
Versão 2	(B)

2.

Como:

$P(\bar{B}) = 0,7$ e $P(B) = 1 - P(\bar{B})$, temos $P(B) = 1 - 0,7 = 0,3$

Assim:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,4 + 0,3 - 0,5 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,2$$

Então:

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,2 = 0,8$$

A opção correta é:

Versão 1	(C)
Versão 2	(B)

3.

$$\log_3 \left(\frac{3^k}{9} \right) = \log_3 \left(\frac{3^k}{3^2} \right) = \log_3 (3^{k-2}) = k - 2$$

A opção correta é:

Versão 1	(B)
Versão 2	(A)

4.

Como:

$$\lim u_n = \lim(n^2) = +\infty$$

$$\text{Então } \lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0 + 0 = 0$$

A opção correta é:

Versão 1	(A)
Versão 2	(D)

5.

A área do quadrilátero [ABCD] pode ser obtida subtraindo a área do triângulo [OAB] à área do triângulo [OCD].

Assim:

$$A_{[OCD]} = \frac{\overline{CD} \times \overline{OC}}{2} = \frac{tg \alpha \times 1}{2} = \frac{tg \alpha}{2}$$

$$A_{[AOB]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OB}}{2} = \frac{sen \alpha \times cos \alpha}{2}$$

Logo:

$$A_{[ABCD]} = A_{[OCD]} - A_{[AOB]} = \frac{tg \alpha}{2} - \frac{sen \alpha \times cos \alpha}{2}$$

E como:

$$sen \alpha \times cos \alpha = \frac{sen(2\alpha)}{2}$$

Temos que:

$$A_{[ABCD]} = \frac{tg \alpha}{2} - \frac{\frac{sen(2\alpha)}{2}}{2} = \frac{tg \alpha}{2} - \frac{sen(2\alpha)}{4}$$

A opção correta é:

Versão 1	(B)
Versão 2	(C)

6.

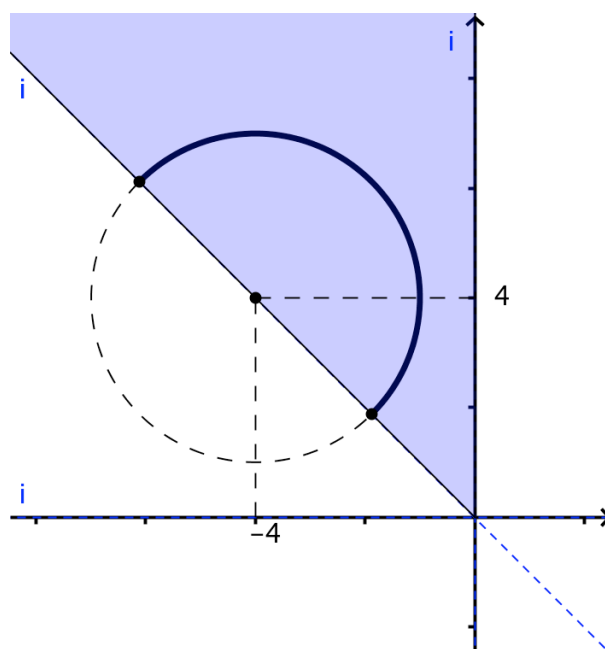
Temos que:

$$|z + 4 - 4i| = 3 \Leftrightarrow |z - (-4 + 4i)| = 3$$

Então esta condição representa no plano complexo o conjunto dos pontos cuja distância ao ponto de coordenadas (-4,4) é igual a 3, ou seja a circunferência de centro em (-4,4) e raio 3.

A condição $\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$ representa o conjunto de pontos cujos argumentos estão compreendidos entre $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{4}$.

Assim, fazendo a interseção dos dois conjuntos, obtemos a semicircunferência representada na figura:



Como:

$$\text{perímetro da circunferência} = 2 \times \pi \times 3 = 6\pi$$

$$\text{Então o comprimento pedido é } \frac{6\pi}{2} = 3\pi$$

A opção correta é:

Versão 1	(C)
Versão 2	(B)

7.

Como o triângulo [ABC] é equilátero então o ângulo ABC tem de amplitude 60° .

Assim o declive da reta AB é:

$$m = \text{tg}(60^\circ) = \sqrt{3}$$

Logo a reta AB será uma reta do tipo:

$$y = \sqrt{3}x + b$$

Como o ponto B de coordenadas (1,0), pertence a esta reta, temos:

$$0 = \sqrt{3} \times 1 + b \Leftrightarrow b = -\sqrt{3}$$

Logo a reta AB tem por equação:

$$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$$

A opção correta é:

Versão 1	(D)
Versão 2	(C)

8.

$$u_2 = -3u_1 + 2 = -3a + 2$$

$$u_3 = -3u_2 + 2 = -3(-3a + 2) + 2 = 9a - 4$$

A opção correta é:

Versão 1	(B)
Versão 2	(C)

Grupo II

1. Seja $w_1 = -2 + 2i^{19}$

Como $i^{19} = i^{16} \times i^3 = i^3 = -i$ vem $w_1 = -2 + 2i^{19} \Leftrightarrow w_1 = -2 + 2 \times (-i) \Leftrightarrow w_1 = -2 - 2i$.

Tem-se que:

- $|w_1| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- Sendo θ um argumento de w_1 , como $\theta \in 3^\circ$ quadrante e $\operatorname{tg} \theta = 1$, vem

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{Assim, } w_1 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{4} \right)$$

Substituindo vem:

$$z = \frac{-2 + 2i^{19}}{\sqrt{2} \operatorname{cis} \theta} = \frac{2\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{4} \right)}{\sqrt{2} \operatorname{cis} \theta} = \frac{2 \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{4} \right)}{\operatorname{cis} \theta} = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{4} - \theta \right)$$

Para que $z = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{4} - \theta \right)$ seja um imaginário puro, terá de ser verdadeira a igualdade

$$\frac{5\pi}{4} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Tem-se então:

$$\frac{5\pi}{4} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow -\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow -\theta = -\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} - k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

Como se pretendem os valores de θ pertencentes ao intervalo $]0, 2\pi[$ vamos atribuir valores inteiros a k .

$$\text{Para } k = 0 \text{ vem } \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Para } k = -1 \text{ vem } \theta = \frac{3\pi}{4} + \pi \Leftrightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}.$$

Como $\theta \in]0, 2\pi[$ os valores de θ são então $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$.

2.

2.1. Sejam:

H : “o funcionário escolhido é homem” e C : “o funcionário escolhido reside em Coimbra”

Pretende-se calcular $P(\bar{H}|C) = \frac{P(\bar{H} \cap C)}{P(C)}$.

Como 60% dos funcionários da empresa residem fora de Coimbra, tem-se $P(\bar{C}) = 0,6$

Como o número de homens é igual ao número de mulheres, tem-se $P(H) = P(\bar{H}) = 0,5$

Como 30% dos homens residem fora de Coimbra, tem-se $P(\bar{C}|H) = 0,3$

Determinemos $P(\bar{C} \cap H)$:

$$P(\bar{C}|H) = 0,3 \Leftrightarrow \frac{P(\bar{C} \cap H)}{P(H)} = 0,3 \Leftrightarrow P(\bar{C} \cap H) = 0,3 \times P(H) \Leftrightarrow P(\bar{C} \cap H) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$$

Determinemos $P(H \cap C)$:

$$P(\bar{C} \cap H) + P(H \cap C) = P(H) \Leftrightarrow P(H \cap C) = P(H) - P(\bar{C} \cap H) \Leftrightarrow P(H \cap C) = 0,50 - 0,15 \Leftrightarrow P(H \cap C) = 0,35$$

Determinemos $P(\bar{H} \cap C)$:

Como $P(\bar{C}) = 0,6$ então, $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 0,4$

$$P(\bar{H} \cap C) + P(H \cap C) = P(C) \Leftrightarrow P(\bar{H} \cap C) = P(C) - P(H \cap C) \Leftrightarrow P(\bar{H} \cap C) = 0,40 - 0,35 \Leftrightarrow P(\bar{H} \cap C) = 0,05$$

$$\text{Assim, } P(\bar{H}|C) = \frac{P(\bar{H} \cap C)}{P(C)} = \frac{0,05}{0,40} = 0,125 = \frac{1}{8}.$$

A probabilidade de o funcionário escolhido dessa empresa ser mulher, sabendo que reside em Coimbra é $\frac{1}{8}$.

2.2. Seja C o acontecimento “O funcionário escolhido reside em Coimbra”. Sabe-se que $P(C) = 0,4$. Como a empresa tem oitenta funcionários, então, 32 residem em Coimbra, pois $0,4 \times 80 = 32$.

Pretende-se determinar a probabilidade de, num grupo de três funcionários, escolhidos ao acaso, haver no máximo dois a residirem em Coimbra, ou seja haver dois, ou um, ou nenhum a residirem em Coimbra.

O número de casos possíveis é dado por ${}^{80}C_3$ que corresponde ao número de grupos que é possível formar com três funcionários escolhidos de entre os 80 funcionários da empresa.

O número de casos favoráveis é dado por ${}^{80}C_3 - {}^{32}C_3$ em que:

- ${}^{80}C_3$ representa o número total de grupos (n° de casos possíveis);
- ${}^{32}C_3$ representa o número de grupos de três funcionários escolhidos de entre os 32 que residem em Coimbra.

Assim, a diferença ${}^{80}C_3 - {}^{32}C_3$ corresponde ao número de grupos de três funcionários, sendo que, em cada grupo, existem no máximo dois funcionários a residir em Coimbra.

De acordo com a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis à realização desse acontecimento e o número de casos possíveis, quando estes são todos equiprováveis e o espaço de resultados é finito.

Portanto, a probabilidade pedida é dada por $\frac{{}^{80}C_3 - {}^{32}C_3}{{}^{80}C_3}$.

3.

3.1. Determinemos o raio da esfera, r .

Sabe-se que a distância do ponto P à base do recipiente é 16 cm.

Por outro lado a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto P é dada em função de t , por $d(t) = 10 + (5 - t)e^{-0,05t}$. No instante inicial a esfera encontra-se na base do recipiente, pelo que a distância do centro da base ao ponto P é dado por :

$$\begin{aligned} d(0) &= 10 + (5 - 0)e^{-0,05 \times 0} \\ &= 10 + 5 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Assim, o raio da esfera é dado por:

$$r = (16 - 15) \text{ cm} \\ = 1 \text{ cm}$$

O volume da esfera é dado por $V = \frac{4}{3}\pi \times 1^3$.

O valor do volume arredondado às centésimas é dado por $V \approx 4,19 \text{ cm}^3$.

3.2. Para determinar o instante em que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima, comecemos por determinar a expressão analítica da primeira derivada de d .

$$\begin{aligned} d'(t) &= (5-t)'e^{-0,05t} + (e^{-0,05t})'(5-t) = \\ &= -e^{-0,05t} - 0,05e^{-0,05t}(5-t) \\ &= e^{-0,05t}(-1 - 0,25 + 0,05t) \\ &= e^{-0,05t}(-1,25 + 0,05t). \end{aligned}$$

Como $D_d = \mathbb{R}^+$ e $d'(t) = e^{-0,05t}(-1,25 + 0,05t)$ então a função d' tem domínio $\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} d'(t) = 0 \wedge t \in D_{d'} &\Leftrightarrow e^{-0,05t}(-1,25 + 0,05t) = 0 \wedge t \in D_{d'} \Leftrightarrow -1,25 + 0,05t = 0 \wedge t \in D_{d'} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = \frac{1,25}{0,05} \wedge t \in D_{d'} \Leftrightarrow t = 25 \end{aligned}$$

Sinal de d' : Como $e^{-0,05t}$ é sempre positivo então o sinal de $d'(t)$ depende apenas do sinal de $(-1,25 + 0,05t)$. Assim,

$$d'(t) > 0 \wedge t \in D_{d'} \Leftrightarrow -1,25 + 0,05t > 0 \wedge t \in D_{d'} \Leftrightarrow t > \frac{1,25}{0,05} \wedge t \in D_{d'} \Leftrightarrow t > 25$$

Tabela

t	0	25	$+\infty$
d'	-	0	+
d	15	$d(25)$	

Conclusão:

A distância do centro da esfera ao ponto P é mínima no instante $t = 25$ segundos.

4.

4.1. A função f é contínua no intervalo $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ por ser o quociente de duas funções contínuas.

A função f é contínua no intervalo $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ por ser o produto de duas funções contínuas.

Uma vez que a função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, apenas a reta de equação $x = \frac{1}{2}$ poderá ser assíntota vertical do gráfico de f .

Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \left(\frac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} \right); \text{ indeterminação do tipo } \frac{0}{0}$$

Fazendo a mudança de variável: $y = x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y + \frac{1}{2}$

Como $x \rightarrow \frac{1}{2}^-$ então $y \rightarrow 0^-$ e assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \left(\frac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^{y + \frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}}{2 \times \left(y + \frac{1}{2}\right) - 1} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^{\frac{1}{2}} (e^y - 1)}{2y} \right) = \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{(e^y - 1)}{y} \right) \stackrel{(1)}{=} \frac{\sqrt{e}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{e}}{2}, \quad (1) \text{ limite notável} \end{aligned}$$

Como f é contínua à direita de $\frac{1}{2}$, pois $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ e $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) \in \mathbb{R}$, conclui-se assim

que o gráfico de f não admite assíntotas verticais.

4.2. Para efetuar, no intervalo $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, o estudo das concavidades do gráfico de f e averiguar a

existência de pontos de inflexão, determinemos a expressão analítica da segunda derivada de f naquele intervalo.

Cálculo da primeira derivada:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= [(x+1)\ln x]' \\
 &= (x+1)' \ln x + (x+1)(\ln x)' \\
 &= \ln x + (x+1) \frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

Cálculo da segunda derivada:

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left[\ln x + (x+1) \frac{1}{x} \right]' \\
 &= (\ln x)' + \left(1 + \frac{1}{x} \right)' \\
 &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \\
 &= \frac{x-1}{x^2}
 \end{aligned}$$

Determinemos os zeros da segunda derivada de f no intervalo $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$.

$$\begin{aligned}
 f''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow x-1 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 1
 \end{aligned}$$

Assim, o zero de f'' no intervalo $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ é $x = 1$.

Estudemos o sinal de f''

x	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
f''	-	0	+
f	$\cap$	0	$\cup$

Por observação da tabela, conclui-se que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left] \frac{1}{2}, 1 \right]$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $[1, +\infty[$. O gráfico de f tem um ponto de inflexão de coordenadas $(1, 0)$.

4.3. Consideremos agora a função f , definida apenas em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

Definamos a função h por meio de $h(x) = f(x) - 3$

A função h é contínua em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ por ser a diferença de duas funções contínuas:

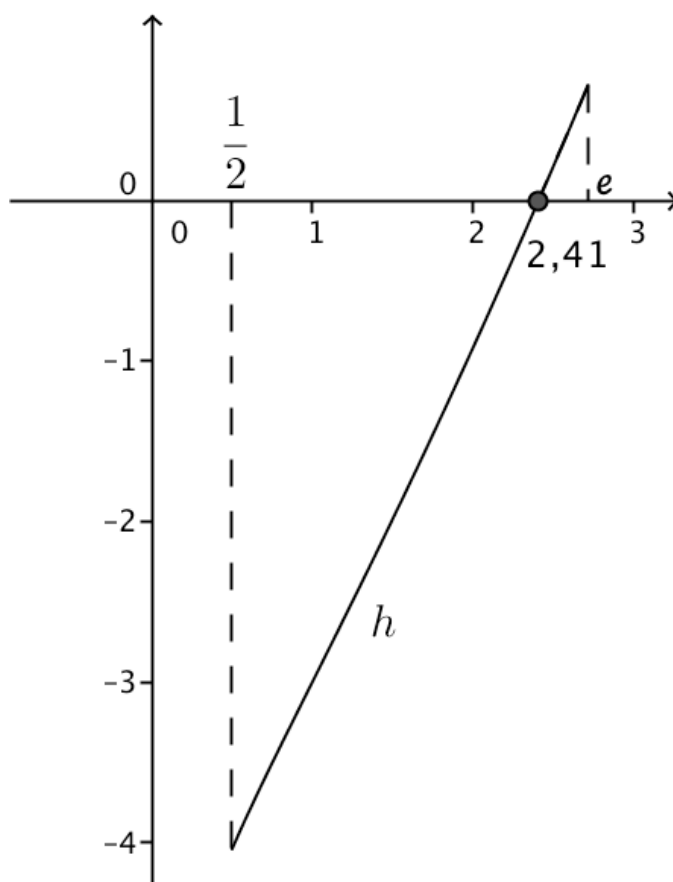
- a função produto de uma função afim $y = x + 1$ por uma função logarítmica $y = \ln x$;
- a função constante $y = 3$.

Então h é contínua em $[1, e] \subset \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Temos também

$$h(1) = f(1) - 3 = 0 - 3 = -3; h(e) = (e+1)\ln e - 3 = e + 1 - 3 = e - 2.$$

Ora $h(1) \times h(e) < 0$

Como a função h é contínua em $[1, e]$ e $h(1) \times h(e) < 0$ então, pelo corolário do teorema de Bolzano, podemos afirmar que existe pelo menos um ponto c do intervalo $]1, e[$ tal que $h(c) = 0$. Usando a calculadora gráfica tentemos determinar aproximadamente tal ponto c .



Na janela de visualização indicada, em que no eixo dos XX incluímos um intervalo que contém o intervalo $]1, e[$, obtemos o gráfico indicado. Observamos que a função h tem apenas um zero o que corresponde à realidade pois no intervalo $[1, e]$ a função h é estritamente crescente e é contínua, logo a solução da equação $h(x) = 0$ é única.

Concluimos assim que no intervalo $[1, e]$ a equação $f(x) = 3$ tem uma só solução $x = a$ com $a \approx 2,41$

5.

5.1. Como o plano que se procura é paralelo ao plano α então um vetor normal ao plano será $\vec{n} = (1, -2, 1)$ pelo que a equação do plano é $x - 2y + z + d = 0$.

Como o ponto A pertence ao plano temos que

$$0 - 2 \times 0 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$$

Assim, temos que uma possível equação do plano que passa no ponto A e é paralelo ao plano α é:

$$x - 2y + z - 2 = 0$$

5.2. Dado que o segmento de reta $[AB]$ é diâmetro da superfície esférica então o ponto médio deste segmento será o centro da circunferência, pelo que

$C = M_{[AB]}$, isto é $C(2, 0, 1)$

Além disso, o raio da superfície esférica será

$$\begin{aligned} r = \overline{AC} &\Leftrightarrow r = \sqrt{(0-2)^2 + (0-0)^2 + (1-2)^2} \\ &\Leftrightarrow r = \sqrt{4+1} \\ &\Leftrightarrow r = \sqrt{5} \end{aligned}$$

Assim, temos que uma equação da superfície esférica será

$$(x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$$

5.3.1ª resolução

Tendo em conta que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AP}\| \times \cos(\widehat{BAP}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AP}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

calculemos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AP}$ e as respetivas normas

$$\overrightarrow{AB} = (4, 0, 0) - (0, 0, 2) = (4, 0, -2)$$

$$\overrightarrow{AP} = (4, y, 0) - (0, 0, 2) = (4, y, -2)$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

$$\|\overrightarrow{AP}\| = \sqrt{4^2 + y^2 + (-2)^2} = \sqrt{20 + y^2}.$$

Assim, vem que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AP}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (4, 0, -2) \cdot (4, y, -2) = \sqrt{20} \times \sqrt{20 + y^2} \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 16 + 4 = 2\sqrt{5} \times \sqrt{20 + y^2} \times \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{\sqrt{5}} = \sqrt{20 + y^2}$$

e elevando ambos os membros ao quadrado obtemos

$$\frac{400}{5} = 20 + y^2 \Leftrightarrow 80 = 20 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 60 = y^2$$

$$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{60}$$

Como $y > 0$ então $y = \sqrt{60}$ e assim se conclui que a ordenada do ponto P é $\sqrt{60}$.

2ª resolução

Como $B(4,0,0)$ e $P(4,y,0)$, com $y > 0$, o vetor $\overrightarrow{BP}$ tem coordenadas $(0,y,0)$. Assim, o vetor $\overrightarrow{BP}$ é um vetor normal ao plano xOz , pelo que a reta BP é perpendicular a esse plano. Deste modo, BP é perpendicular a todas as retas do plano xOz , logo é perpendicular à reta $AB \subset xOz$.

Concluimos assim que o triângulo $[ABP]$ é retângulo em B .

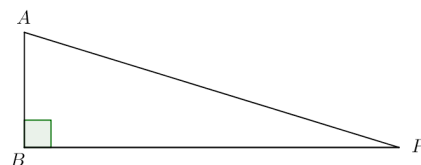
Sabe-se que $\widehat{BAP} = \frac{\pi}{3}$, então através da trigonometria do

triângulo retângulo tem-se:

$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{\|\overrightarrow{BP}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

Como $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{20}$ e $\|\overrightarrow{BP}\| = \|y\| = y$, pois $y > 0$, então $\tan \frac{\pi}{3} = \frac{y}{\sqrt{20}} \Leftrightarrow y = \sqrt{3} \times \sqrt{20} \Leftrightarrow y = \sqrt{60}$

Daqui conclui-se que $y = \sqrt{60}$.



6. Como a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa a então $m_r = f'(a)$. Assim, $f'(x) = (1 - \cos(3x))' \Leftrightarrow f'(x) = 3 \sin(3x)$ e portanto $m_r = f'(a) \Leftrightarrow m_r = 3 \sin(3a)$.

Além disso, sendo a reta s tangente ao gráfico da função g no ponto de abscissa $a + \frac{\pi}{6}$ então $m_s = g'(a + \frac{\pi}{6})$.

Como $g'(x) = (\sin(3x))' \Leftrightarrow g'(x) = 3 \cos(3x)$ temos que

$$m_s = g'(a + \frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow m_s = 3 \cos\left(3\left(a + \frac{\pi}{6}\right)\right) \Leftrightarrow m_s = 3 \cos\left(3a + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow m_s = -3 \sin(3a)$$

Como as retas r e s são perpendiculares então

$$\begin{aligned}
m_r = -\frac{1}{m_s} &\Leftrightarrow 3 \operatorname{sen}(3a) = -\frac{1}{-3 \operatorname{sen}(3a)} \\
&\Leftrightarrow 9 \operatorname{sen}^2(3a) = 1 \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2(3a) = \frac{1}{9} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}(3a) = \pm \sqrt{\frac{1}{9}} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}(3a) = \pm \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Como $\frac{\pi}{3} < a < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi < 3a < \frac{3\pi}{2}$ então conclui-se que $3a \in 3^\circ Q$ pelo que $\operatorname{sen}(3a) < 0$.

Logo, $\operatorname{sen}(3a) = -\frac{1}{3}$, como pretendíamos demonstrar.