Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 635) – 2ª FASE – 21 DE JULHO 2015

Grupo I

1.

Considerando que

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1 \Leftrightarrow a+2a+0{,}4=1 \Leftrightarrow 3a+0{,}4=1$$
$$\Leftrightarrow a=\frac{0{,}6}{3} \Leftrightarrow a=0{,}2$$

Consequentemente a média é igual a

$$\bar{x} = 1\times 0{,}2+2\times 0{,}4+3\times 0{,}4=2{,}2$$

A opção correta é:

Versão 1	(B)
Versão 2	(C)

2.

Por definição de probabilidade condicionada $P(A|B)$ é a probabilidade da bola retirada ser preta sabendo que saiu uma bola com número par, como há quatro bolas pares e só duas são pretas então $P(A|B)=\frac{1}{2}$.

A opção correta é:

Versão 1	(B)
Versão 2	(C)

3.

Sabe-se que $\log_b a = \frac{1}{3}$.
Calculemos o valor de $\log_a(a^2 b)$ usando as propriedade dos logaritmos:
$\log_a(a^2 b) = \log_a a^2 + \log_a b = 2 + \frac{\log_b b}{\log_b a} = 2 + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 2 + 3 = 5$

A opção correta é:

Versão 1	(D)
Versão 2	(A)

4.

Uma vez que f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, para todo o $k \in \mathbb{R}$, para f ser contínua em $\mathbb{R}$ teremos de determinar o valor de k tal que:

Dado que $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2 + e^k$, calculemos o $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x + \ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{x} + \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 2 + 1 = 3, \text{ pois } \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Considerando a igualdade $2 + e^k = 3$ e resolvendo a equação em ordem a k, obtemos
$2 + e^k = 3 \Leftrightarrow e^k = 1 \Leftrightarrow k = 0$

A opção correta é:

Versão 1	(A)
Versão 2	(B)

5.

Sendo $f(x) = 3\,sen^2(x)$, então:
$f'(x) = 3{\times}2\,sen(x)\cos(x) = 3\,sen(2x)$
$f''(x) = 3\cos(2x)\times 2 = 6\cos(2x)$

A opção correta é:

Versão 1	(C)
Versão 2	(D)

6.

$|z| = \overline{OB}$ e como o triângulo é equilátero $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$, logo $|z| = 1$.
Como o triângulo é equilátero todos os ângulos internos são iguais e têm de amplitude $\frac{\pi}{3}\ rad$.
Como o ângulo AOB é um desses ângulos internos, um argumento de z é dado por
$\arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Assim, $z = 1\,cis\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

A opção correta é:

Versão 1	(D)
Versão 2	(C)

7.

A circunferência $x^2 + (y-1)^2 = 2$ tem o seu centro no ponto $C(0,1)$.

Para obtermos a abcissa do ponto A, vamos considerar os pontos da circunferência de ordenada nula.

$x^2 + (y-1)^2 = 2 \wedge y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \wedge y = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \wedge y = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \pm 1 \wedge y = 0$

Como o ponto *A* tem abcissa positiva, então terá de coordenadas (1,0).

Considerando:

$\overrightarrow{CA} = A - C = (1,0) - (0,1) = (1,-1)$

O declive da reta *CA* é:

$$m_{CA} = \frac{-1}{1} = -1$$

E como *r* é perpendicular a *CA*, pois é tangente à circunferência no ponto *A* o seu declive vai ser o simétrico do inverso do declive da reta *CA*.

Assim:

$$m_r = -\frac{1}{-1} = 1$$

Logo a reta *r* terá uma equação do tipo:

$y = x + b$

Como o ponto *A* tem de coordenadas (1,0), temos que:

$0 = 1 + b \Leftrightarrow b = -1$

Logo a reta *r* tem de equação reduzida:

$y = x - 1$

A opção correta é:

Versão 1	(B)
Versão 2	(D)

8.

A sucessão de termo geral $(-1)^n$ não é monótona pois os seus termos são alternadamente negativos e positivos.

A sucessão de termo geral $(-1)^n \times n$, não é monótona pois os seus termos são alternadamente negativos e positivos e não é limitada pois é um infinitamente grande.

A sucessão definida por $1 + n^2$ não é limitada pois é um infinitamente grande positivo.

A resposta correta é a sucessão de termo geral $-\frac{1}{n}$, que como se pode provar analiticamente é monótona crescente e é limitada, sendo -1 um minorante e 0 um majorante do conjunto dos seus termos.

A opção correta é:

Versão 1	(C)
Versão 2	(B)

Grupo II

1.

Como $-1+i = \sqrt{2}cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ pois

- $|-1+i\,| = \sqrt{(-1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$
- Sendo θ um argumento de $-1+i$, como $\theta \in 2^{\underline{o}}$ quadrante e $tg\theta = -1$, vem $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Assim, substituindo em z_1 vem:

$$z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{12}\right)} \Leftrightarrow z_1 = \frac{\sqrt{2}cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = cis\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\Leftrightarrow z_1 = cis\left(\frac{8\pi}{12}\right)$$

$$\Leftrightarrow z_1 = cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

pelo que $\overline{z_1} = cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

Assim, temos que

$$z^4 = \overline{z_1} \Leftrightarrow z^4 = cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[4]{cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow z = cis\left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right) \wedge k \in \{0,1,2,3\}$$

Para

$$k=0,\quad z = cis\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}}{4}\right) = cis\left(-\frac{2\pi}{12}\right) = cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$k=1,\quad z = cis\left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{4}\right) = cis\left(\frac{4\pi}{12}\right) = cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$k=2,\quad z = cis\left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{4}\right) = cis\left(\frac{10\pi}{12}\right) = cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$k=3,\quad z=cis\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}\right)=cis\left(\frac{16\pi}{12}\right)=cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

Os números complexos z que são solução de $z^4=\overline{z_1}$ são assim:

$$S=\left\{cis\left(-\frac{\pi}{6}\right),cis\left(\frac{\pi}{3}\right),cis\left(\frac{5\pi}{6}\right),cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right\}$$

2.

2.1.

Teremos de determinar os valores de $t\in\,]0,3]$, tais que $d(t)=d(0)$.

$d(t)=d(0)\Leftrightarrow 1+\frac{1}{2}sen\left(\pi t+\frac{\pi}{6}\right)=1+\frac{1}{2}sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}sen\left(\pi t+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow sen\left(\pi t+\frac{\pi}{6}\right)=sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow \pi t+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \vee\ \pi t+\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi\,,k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \pi t=2k\pi\ \vee\ \pi t+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\,,k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow t=2k\ \vee\ \pi t=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\,,k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow t=2k\ \vee\ t=\frac{2}{3}+2k\,,k\in\mathbb{Z}$

Como $t\in\,]0,3]$ temos para

$k=0,t=0\vee\ t=\frac{2}{3}$

$k=1,t=2\vee\ t=\frac{8}{3}$

pelo que os instantes, diferentes do inicial, em que o ponto P passou pelo ponto A foram aos $\frac{2}{3}s$, $2s$ e aos $\frac{8}{3}\ s$.

2.2.

A função d é contínua em $[0,+\infty[$ por ser a soma de duas funções contínuas: a função constante $t\to 1$ e a função $t\to\frac{1}{2}sen\left(\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$.

A função $t \to \frac{1}{2} sen\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ é contínua por ser o produto de duas funções contínuas: a função constante $t \to \frac{1}{2}$ e a função $t \to sen\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ que é a composta de uma função trigonométrica com uma função afim.

Então d é contínua em $[3, 4] \subset [0, +\infty[$. Temos também

$$d(3) = 1 + \frac{1}{2} sen\left(\pi \times 3 + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} sen\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$d(4) = 1 + \frac{1}{2} sen\left(\pi \times 4 + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

Ora $d(3) < 1{,}1 < d(4)$

Como a função d é contínua em $[3, 4]$ e $d(3) < 1{,}1 < d(4)$ então, pelo teorema de Bolzano, podemos afirmar que existe um ponto c do intervalo $]3, 4[$ tal que $d(c)$= 1,1. Logo, há um instante entre o 3º e 4º segundos em que a distância de P a O é 1,1m.

3.

3.1.

Calculemos os limites de f nos ramos infinitos:

i. $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + xe^x\right) = 1 + \lim_{x \to -\infty} \left(xe^x\right) \underset{y=-x}{=} 1 + \lim_{y \to +\infty} \left(-ye^{-y}\right) = 1 - \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} =$$

$$= 1 - \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}} = 1 - 0 = 1 \text{, pois } \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty .$$

Concluímos daqui que a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de f, quando $x \to -\infty$.

ii. $$\lim_{x \to +\infty} \left[\ln(x-3) - \ln(x)\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\ln\left(\frac{x-3}{x}\right)\right] = \ln\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{x-3}{x}\right) = \ln(1) = 0 .$$

Podemos assim concluir que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$.

3.2.

Dado que $x \in]-\infty, 3]$ então temos que

$f(x) - 2x > 1 \Leftrightarrow 1 + xe^x - 2x > 1$

$\Leftrightarrow xe^x - 2x > 0$

$\Leftrightarrow x(e^x - 2) > 0$

Determinemos os zeros de $x(e^x - 2)$

$$x(e^x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee e^x = 2$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = ln2$$

Recorrendo a um quadro de sinal

x	$-\infty$	0		$ln2$		3
x	$-$	0	$+$	$ln2$	$+$	3
$e^x - 2$	$-$	-2	$-$	0	$+$	$e^3 - 2$
$x(e^x - 2)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$3(e^3 - 2)$

Conclui-se que o conjunto solução de $f(x) - 2x > 1$ é $]-\infty, 0[\cup]ln2, 3]$.

3.3.

Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 4.

$A\big(4, f(4)\big) \in t$ e o declive da reta t é dado por $m_t = f'(4)$.

Como $f(4) = ln(4 - 3) - ln4 = -ln4$ temos que $(4, -ln4)$ são as coordenadas do ponto de tangência.

Calculemos $f'(x)$

$$f'(x) = (ln(x - 3) - lnx)' = \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x}$$

pelo que

$$f'(4) = \frac{1}{4 - 3} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Assim, temos que a reta t, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 4, tem de equação

$$y + ln4 = \frac{3}{4}(x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - 3 - ln4$$

4. O gráfico A não pode representar a função f porque se a função f tem derivada finita em todos os pontos do domínio então é contínua em todo o seu domínio o que não acontece uma vez que a função representada no gráfico A tem um ponto de descontinuidade.

Tendo em conta que $f''(x) < 0,\ \forall x \in \left]-\infty, 0\right[$ então nesse intervalo o gráfico da função f deveria apresentar a concavidade voltada para baixo o que não se verifica no gráfico B e por isso se exclui.

Finalmente exclui-se o gráfico C porque se $f'(0) > 0$ então a reta tangente ao gráfico no ponto de abcissa zero deveria ter declive positivo, o que não se verifica.

5.

Sabendo que $P(A) \neq 0$, tem-se:

$P(A \cup \bar{B}) - 1 + P(B) = P(A) \times P(B|A) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) - 1 + P(B) = P(A) \times \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$\Leftrightarrow P(A) + 1 - P(B) - P(A \cap \bar{B}) - 1 + P(B) = P(B \cap A)$$

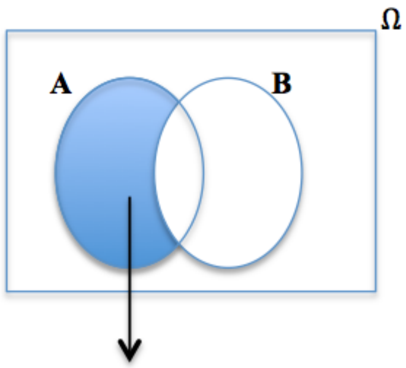
$$\Leftrightarrow P(A) - P(A \cap \bar{B}) = P(B \cap A)$$

$\Leftrightarrow P(A) - \big(P(A) - P(A \cap B)\big) = P(B \cap A)$

$\Leftrightarrow P(A) - P(A) + P(A \cap B) = P(B \cap A)$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B \cap A)$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A \cap B)$, c.q.d.



$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

6.

6.1.

Como $V(1, 1, z)$ pertence ao plano PQV temos que

$$6 \times 1 + z - 12 = 0 \ \Leftrightarrow\ z = 6$$

Assim, as coordenadas do ponto V são $(1, 1, 6)$.

6.2.

Como o plano pretendido é perpendicular à reta OR então um possível vetor normal ao plano será $\overrightarrow{OR}$ de coordenadas $(2{,}2{,}2)$, pelo que o plano é definido por uma equação da forma

$2x + 2y + 2z + d = 0$.

Como $P(0{,}0{,}2)$ pertence ao plano então temos que

$$2 \times 2 + 2 \times 0 + 2 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$$

Assim, uma possível equação cartesiana do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta OR é:

$$2x + 2y + 2z - 4 = 0$$

6.3.

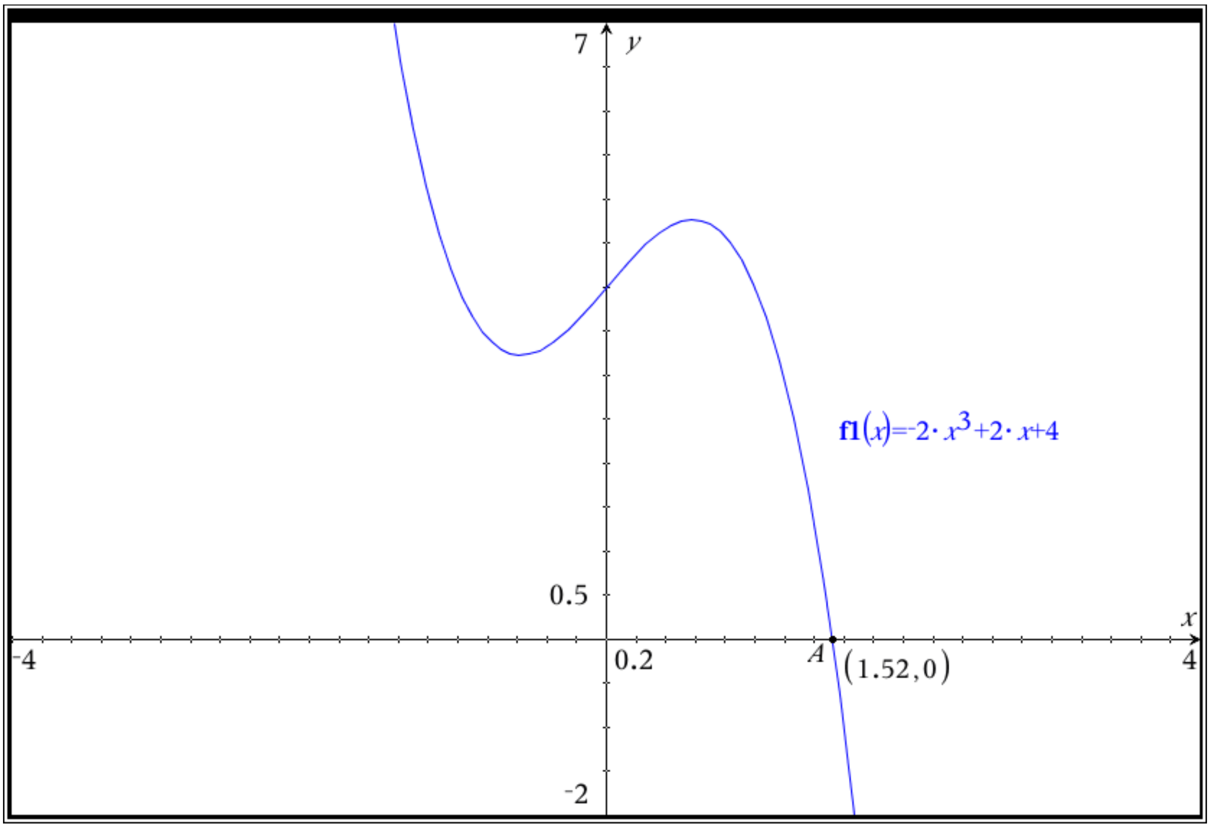
De acordo com as condições do enunciado, o ponto A tem coordenadas do tipo $(x, 2, x^3)$, com $x \in IR$. Determinemos as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{TQ}$.

$\overrightarrow{OA} = (x, 2, x^3)$ e $\overrightarrow{TQ} = Q - T = (2,2,0) - (0,0,2) = (2,2,-2)$

Dado que $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{TQ}$ temos que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{TQ} = 0 \Leftrightarrow (x, 2, x^3).(2,2,-2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x + 4 - 2x^3 = 0$$

Tendo em conta a janela de visualização sugerida, obtemos, com recurso à calculadora gráfica, a representação gráfica da função definida por $y_1 = 2x + 4 - 2x^3$.



De onde se verifica que a abcissa do ponto A é aproximadamente 1,52.

6.4.

Como temos 7 cores para colorir o poliedro de 9 faces então o número de casos possíveis é 7^9.

Tendo em conta que 2 faces triangulares devem ser coloridas de branco, que duas faces quadradas devem ser coloridas de azul e as restantes faces coloridas com cores todas diferentes então o número de casos favoráveis é dado por ${}^4C_2 \times {}^5C_2 \times 5!$

Assim, a probabilidade pedida é

$$p = \frac{{}^4C_2 \times {}^5C_2 \times 5!}{7^9} \approx 0{,}0002$$