Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 635) – 1ª FASE – 25 DE JUNHO 2018

CADERNO 1

1.

1. 1. $\boxed{\text{P2001/2002}}$

Seja X a variável aleatória: " Número de vezes que sai a face numerada com o número 3".

X segue uma distribuição binomial com 10 provas repetidas e probabilidade de sucesso $\frac{1}{4}$.

Assim, $n = 10$, $p = \frac{1}{4}$ e consequentemente a probabilidade de insucesso é $q = \frac{3}{4}$, pelo que:

$$P(X = 6) = {}^{10}C_6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0{,}016 .$$

A resposta correta é a opção **(B)**.

1. 2. $\boxed{\text{PMC2015}}$

Como f é diferenciável no intervalo $[0, 2]$, logo pelo Teorema de Lagrange temos

$\exists c \in]0, 2[: f'(c) = t.m.v._{[0,2]}$, ou seja, $\exists c \in]0, 2[: f'(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$.

Como por hipótese $f(0) = 1$, então $\exists c \in]0, 2[: f'(c) = \dfrac{f(2) - 1}{2}$.

Pelo facto de, por hipótese, $\forall x \in [0, 2] : 0 < f'(x) < 9$, temos em particular que: $0 < f'(c) < 9$,

ou seja, $0 < \dfrac{f(2) - 1}{2} < 9 \Leftrightarrow 0 < f(2) - 1 < 18 \Leftrightarrow 1 < f(2) < 19$.

A resposta correta é a opção **(B)**.

2.

2. 1.

As bases do prisma são hexágonos regulares, pelo que a amplitude dos seus ângulos internos é 120°. Assim, como $\overline{PQ}=4$, vem que $\overline{QR}=4$ e portanto:

$$\overrightarrow{QP}\bullet\overrightarrow{QR}=\left\|\overrightarrow{QP}\right\|\times\left\|\overrightarrow{QR}\right\|\times\cos\left(P\hat{Q}R\right)=\overline{PQ}\times\overline{QR}\times\cos\left(120^{\circ}\right)=4\times 4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{16}{2}=-8.$$

2. 2.

Dado que as faces laterais do prisma são retângulos, então a sua área lateral é dada por:

$6\times\overline{PQ}\times\overline{PS}=6\times 4\times\overline{PS}=24\overline{PS}$.

Um vetor normal ao plano $PQR: 2x+3y-z-15=0$ é $\vec{n}\left(2,3,-1\right)$ e como a reta PS é perpendicular ao plano PQR, então um vetor diretor da reta PS é $\vec{n}$ e portanto:

$$PS:\left(x,y,z\right)=\left(14,5,0\right)+k\left(2,3,-1\right),\ k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}x=14+2k\\ y=5+3k\\ z=-k\end{cases},k\in\mathbb{R}\ .$$

Como o ponto P pertence à reta PS as suas coordenadas são da forma $\left(14+2k,5+3k,-k\right),k\in\mathbb{R}$.

Além disso, como P também pertence ao plano PQS e substituindo as suas coordenadas na equação deste, vem:

$$2\left(14+2k\right)+3\left(5+3k\right)-\left(-k\right)-15=0\Leftrightarrow 28+4k+15+9k+k-15=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 14k=-28\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k=-2$$

Logo, as coordenadas de P são: $\left(14+2\times\left(-2\right),5+3\times\left(-2\right),-\left(-2\right)\right)=\left(10,-1,2\right)$.

Assim, temos $\overline{PS}=\sqrt{\left(10-14\right)^2+\left(-1-5\right)^2+\left(2-0\right)^2}=\sqrt{16+36+4}=\sqrt{56}$, pelo que a medida da área lateral do prisma é dada por: $24\ \overline{PS}=24\times\sqrt{56}$. De onde se conclui que a área lateral do prisma é, aproximadamente, $179{,}6$.

2. 3.

O número de casos possíveis é ${}^{6}C_{2}\times{}^{6}C_{2}$. Escolhem-se dois vértices de uma das bases do prisma. O número de maneiras de o fazer é ${}^{6}C_{2}$. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^{6}C_{2}$ maneiras distintas de escolher dois vértices da outra base do prisma.

O número de casos favoráveis é 6. Cada uma das seis faces do prisma tem exatamente quatro vértices, sendo que exatamente dois pertencem a uma das bases e os outros dois pertencem à outra base.

Assim, pela Lei de Laplace, a probabilidade pedida é: $\dfrac{6}{{}^{6}C_{2}\times{}^{6}C_{2}}=\dfrac{2}{75}\approx 0{,}03$.

3.

3. 1.

Os doze alunos vão dispor-se lado a lado em linha reta para tirar uma fotografia.

Há $4!$ formas diferentes de os alunos de Espanhol se disporem juntos lado a lado.

Há $8!$ formas diferentes de os alunos de Inglês se disporem juntos lado a lado.

Há 2 maneiras diferentes de estes grupos de alunos se disporem lado a lado. O grupo de alunos de Espanhol à esquerda e o grupo de Inglês à direita ou vice-versa.

Assim, o número pedido é dado por: $2 \times 4! \times 8! = 1\,935\,360$.

A resposta correta é a opção (**D**).

3. 2.

Designemos o acontecimento "o aluno escolhido estuda Espanhol" por E e o acontecimento "o aluno escolhido estuda Inglês" por I .

Sabemos que:

- $P\left(E\right) = P\left(I\right)$, pois o número de alunos que estuda Espanhol é igual ao número de alunos que estuda Inglês. **(1)**
- $P\left(E \cup I\right) = 4 \times P\left(E \cap I\right)$, pois o número de alunos que estudam pelo menos uma das duas línguas é o quádruplo do número de alunos que estudam as duas línguas. **(2)**

Pretende-se determinar a probabilidade de esse aluno estudar Inglês, sabendo que estuda Espanhol, ou seja, $P\left(I \middle| E\right)$.

Como $P\left(E \cup I\right) = P\left(E\right) + P\left(I\right) - P\left(E \cap I\right)$ e tendo em conta **(1)** e **(2)**, temos:

$$4 \times P\left(E \cap I\right) = P\left(E\right) + P\left(I\right) - P\left(E \cap I\right) \Leftrightarrow 5 \times P\left(E \cap I\right) = P\left(E\right) + P\left(E\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\,P\left(E \cap I\right) = 2P\left(E\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(E \cap I\right) = \frac{2}{5}\,P\left(E\right)$$

Assim, $P\left(I \middle| E\right) = \dfrac{P\left(E \cap I\right)}{P\left(E\right)} = \dfrac{\frac{2}{5} \times P\left(E\right)}{P\left(E\right)} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$, ou seja, 40% .

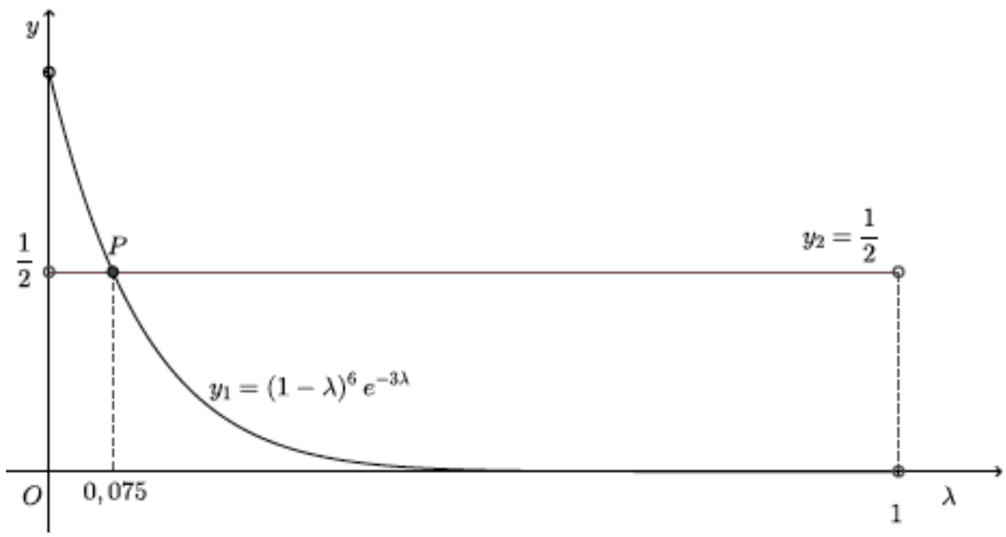
Logo, a probabilidade pedida é: 40% .

4.

Dado que $R=\lambda$ **e** $L=\frac{I}{2}$ e como $L=I\left(1-R\right)^6 e^{-3\lambda}$, então temos que

$\frac{I}{2}=I\left(1-\lambda\right)^6 e^{-3\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\left(1-\lambda\right)^6 e^{-3\lambda}$ **.**

Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, representamos, numa janela adequada, a curva correspondente a $y_1=\left(1-\lambda\right)^6 e^{-3\lambda}$ e a reta de equação $y_2=\frac{1}{2}$.



Usando a função da calculadora gráfica para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de intersecção dos dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às milésimas) da abcissa do ponto $P: x_P \approx 0{,}075$.

5.

Pretende-se determinar o valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{12}\right[$ para o qual o número complexo

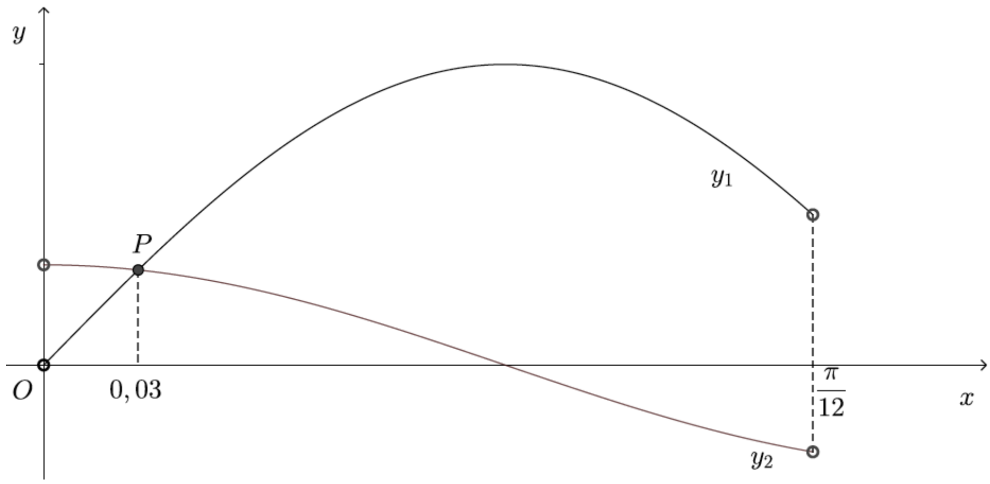
$z=\left(\cos x + i \operatorname{sen} x\right)^{10}$ verifica a condição $Im\left(z\right)=\frac{1}{3}Re\left(z\right)$.

Na forma trigonométrica temos $z=\left(e^{ix}\right)^{10}$ e aplicando a fórmula de Moivre temos $z=e^{i\left(10x\right)}$,

ou seja, $z=\cos\left(10x\right)+i\operatorname{sen}\left(10x\right)$.

Assim, $Im\left(z\right)=\frac{1}{3}Re\left(z\right) \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(10x\right)=\frac{1}{3}\cos\left(10x\right)$.

Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, representamos, numa janela adequada, as curvas correspondentes a $y_1 = \operatorname{sen}\left(10x\right)$ e a $y_2 = \frac{1}{3}\cos\left(10x\right)$.



Usando a função da calculadora gráfica para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de intersecção dos dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às centésimas) da abcissa do ponto $P: x_P \approx 0{,}03$.

A resposta correta é a opção **(B)**.

6.

Como a, $a+6$ e $a+18$ são três termos consecutivos de uma progressão geométrica tem-se $\frac{a+6}{a} = \frac{a+18}{a+6}$, com $a \neq 0$ e $a \neq -6$, sendo $\frac{a+6}{a}$ a razão, r, da progressão.

Sendo $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, -6\right\}$, vem:

$$\frac{a+6}{a} = \frac{a+18}{a+6} \Leftrightarrow \left(a+6\right)^2 = a\left(a+18\right) \Leftrightarrow a^2 + 12a + 36 = a^2 + 18a \Leftrightarrow 6a = 36 \Leftrightarrow a = 6 .$$

Então, $r = \frac{6+6}{6} = 2$.

Seja $\left(u_n\right)$ essa progressão.

Como a soma dos sete primeiros termos da progressão geométrica é igual a 381 vem:

$$u_1 \times \frac{1-2^7}{1-2} = 381 \Leftrightarrow 127u_1 = 381 \Leftrightarrow u_1 = \frac{381}{127} \Leftrightarrow u_1 = 3 .$$

7.

Sendo o ponto O o centro e o ponto A de abcissa 2, então o raio da circunferência é 2.

Assim, a condição que define o círculo é dada por: $x^2 + y^2 \leq 4$.

Como os pontos B e F têm abcissa 1, os simétricos em relação ao eixo Oy, C e E, têm abcissa -1.

O semiplano fechado à direita da reta BF reunido com o semiplano fechado à esquerda da reta CE é descrito por $\left|x\right| \geq 1$.

A resposta correta é a opção **(C)**.

CADERNO 2

8.

8.1. $\boxed{\textbf{P2001/2002}}$

Tendo em conta que $\left(2, -1, 0\right)$ são as coordenadas de um vetor diretor da reta r e que qualquer vetor diretor da reta é colinear com este vetor, então podemos eliminar as opções (B) e (C).

Além disso, o ponto $\left(-1, 2, 0\right)$ não pertence à reta r, pois qualquer ponto da reta tem cota igual a 3. Podemos, assim, eliminar a opção (D).

Logo, a resposta correta é a opção **(A)**.

Note-se que o ponto $\left(3, 0, 3\right)$ pertence à reta, pois $\frac{3+1}{2} = \frac{0-2}{-1} \wedge 3 = 3$.

8.2. $\boxed{\textbf{PMC2015}}$

Sabe-se que $arc\operatorname{sen}\left(1\right) = \frac{\pi}{2}$, pois a função $arc\operatorname{sen} x$ está definida em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e pretende-se descobrir a amplitude do ângulo α tal que $\operatorname{sen}\alpha = 1$.

Além disso, $arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3}$, pois a função $arc\cos x$ está definida em $\left[0, \pi\right]$ e, da mesma forma que o anterior, pretende-se descobrir o ângulo β tal que $\cos\beta = -\frac{1}{2}$.

Logo, $arc\operatorname{sen}\left(1\right) + arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$.

A resposta correta é a opção **(A)**.

9.

Comecemos por simplificar w,

$$w = 1 + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}\, i^5}{1+2i} = 1 + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}\, i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = 1 + \frac{2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\, i - \sqrt{3}\, i + 2\sqrt{3}\, i^2}{1^2 - (2i)^2} =$$

$$= 1 + \frac{2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} i - 2\sqrt{3}}{1-4i^2} = 1 - \frac{5\sqrt{3} i}{5} = 1 - \sqrt{3} i$$

Escrevendo w na forma trigonométrica, temos que $1 - \sqrt{3} i = r e^{i\theta}$, onde:

- $r = \left|1 - \sqrt{3}\, i\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$, como o afixo de $1 - \sqrt{3} i$ pertence ao 4º Q., θ pertence ao 4º Q.. Logo, $\theta = -\frac{\pi}{3}$ (argumento principal).

Assim, $w = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

Como w é uma raiz quarta de z, as restantes raízes quartas de z são:

$$2e^{i\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \;;\quad 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{e} \quad 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

Como se pretende a raiz quarta de z cujo afixo pertence ao primeiro quadrante, o número complexo pedido é $2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

10.

10.1. $\boxed{\textbf{P2001/2002}}$

Recorrendo a uma tabela de dupla entrada tem-se:

$\times$	**0**	**1**	**2**	**3**
0		0	0	0
1	0		2	3
2	0	2		6
3	0	3	6	

Assim, tem-se que $X = \{0, 2, 3, 6\}$ e $P(X=0) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, $P(X=2) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, $P(X=3) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ e $P(X=6) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, pelo que $k = 0$.

A resposta correta é a opção **(D)**.

10.2. PMC2015

$$\lim\left(u_n\right)=\lim\left(\frac{n+k}{n}\right)^n=\lim\left(\frac{n}{n}+\frac{k}{n}\right)^n=\lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e^k.$$

Como o limite da sucessão $\left(u_n\right)$ é solução da equação $\ln\left(\frac{x}{e}\right)=3$ temos:

$$\ln\left(\frac{e^k}{e}\right)=3 \Leftrightarrow \ln\left(e^{k-1}\right)=3 \Leftrightarrow k-1=3 \Leftrightarrow k=4$$

A resposta correta é a opção **(D)**.

11.

Comecemos por exprimir b em função de a:

$$\ln b=4\ln a \Leftrightarrow \ln b=\ln\left(a^4\right) \Leftrightarrow b=a^4.$$

Assim, temos:

$a^x \geq b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \geq \left(a^4\right)^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \geq a^{\frac{4}{x}}$, como $a>1$ a função exponencial é crescente, logo:

$$x \geq \frac{4}{x} \Leftrightarrow x-\frac{4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x} \geq 0$$

Calculando os zeros do numerador e do denominador da fração $\frac{x^2-4}{x}$ e estudando a variação do sinal temos:

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
x^2-4	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2-4}{x}$	$-$	0	$+$	n.d.	$-$	0	$+$

Conclui-se que o conjunto solução da condição $\frac{x^2-4}{x} \geq 0$ é $\left[-2,0\right[\cup \left[2,+\infty\right[$.

12.

12.1.

Para obtermos os zeros da função g em $\mathbb{R}^-$, igualamos a zero o primeiro ramo da função:

$$\frac{e^{2x}-1}{4x}=0 \Leftrightarrow e^{2x}-1=0 \wedge 4x \neq 0 \Leftrightarrow e^{2x}=1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow 2x=0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x=0 \wedge x \neq 0 .$$

Concluímos que, a função g em $\mathbb{R}^-$, não tem zeros.

Em $\left[0, \pi\right]$, consideramos o segundo ramo:

$\frac{1}{2-\operatorname{sen}(2x)}=0 \Leftrightarrow 1=0 \wedge 2-\operatorname{sen}(2x) \neq 0$. Concluímos que, a função g no intervalo $\left[0, \pi\right]$, não tem zeros.

Logo, não tem zeros no seu domínio.

A resposta correta é a opção **(A)**.

12.2.

Para averiguar se a função g é contínua em $x=0$, temos que verificar se $g(0)=\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$.

- $g(0)=\frac{1}{2-\operatorname{sen}0}=\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2}$;
- $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)=\frac{1}{2-\operatorname{sen}0}=\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2}$;
- $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x \to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{4x}=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x \to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)=\frac{0}{0}$ (indeterminação).

(fazendo $y=2x$, temos que se $x \to 0^-$, então $y \to 0^-$)

$$\frac{1}{2}\left(\underbrace{\lim_{y \to 0^-}\frac{e^{y}-1}{y}}_{\text{limite notável}}\right)=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

Como $g(0)=\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)=\frac{1}{2}$, então a função g é contínua em $x=0$.

12.3.

Comecemos por determinar a expressão da derivada da função g em $\left]0, \pi\right]$:

$$g'(x) = \left(\frac{1}{2-\operatorname{sen}(2x)}\right)' = \frac{1' \times (2-\operatorname{sen}(2x)) - 1 \times (2-\operatorname{sen}(2x))'}{(2-\operatorname{sen}(2x))^2} = \frac{0 - 1 \times (0 - 2\cos(2x))}{(2-\operatorname{sen}(2x))^2} =$$

$$= \frac{-1 \times (-2\cos(2x))}{(2-\operatorname{sen}(2x))^2} = \frac{2\cos(2x)}{(2-\operatorname{sen}(2x))^2}$$

Determinemos, agora, os zeros de g' no intervalo dado:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(2x) = 0 \wedge (2-\operatorname{sen}(2x))^2 \neq 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \wedge \underbrace{2 \neq \operatorname{sen}(2x)}_{\text{condição universal}}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0$, então $x = \frac{\pi}{4}$;

Se $k = 1$, então $x = \frac{3\pi}{4}$.

Para os restantes valores de k, x não pertence ao intervalo pretendido.

Estudando a variação do sinal da função derivada e relacionando-o com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$		$\nearrow$	Máx	$\searrow$	Min	$\nearrow$	Máx

Podemos concluir que:

- o gráfico da função g é crescente em $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ e decrescente em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.
- o mínimo relativo é, $g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2-\operatorname{sen}\left(2\times\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2-\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$.
- os máximos relativos são, $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2-\operatorname{sen}\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2-1} = 1$ e

  $g(\pi) = \frac{1}{2-\operatorname{sen}(2\times\pi)} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$.

13.

Como a função f é contínua em $\left]0, \pi\right[$ a eventual existência de assíntotas verticais ao gráfico de f será nos pontos 0 e π que são pontos aderentes ao domínio de f e não lhe pertencem.

Vejamos:

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{0}{0}$ (indeterminação)

  $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \dfrac{1}{\underbrace{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{limite notável}}} = \dfrac{1}{1} = 1$, pelo que $x = 0$ não é assíntota ao gráfico de f.

- $\lim\limits_{x \to \pi^-} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} \pi} = \dfrac{\pi}{0^+} = +\infty$, logo, $x = \pi$ é assíntota vertical do gráfico de f.

A resposta correta é a opção (**B**).

14.

As coordenadas do ponto P e as coordenadas do ponto Q são, respetivamente, $P\left(a, \dfrac{\ln a}{a}\right)$ e $Q\left(2a, \dfrac{\ln(2a)}{2a}\right)$.

Logo, o declive da reta PQ é:

$$m = \frac{\frac{\ln(2a)}{2a} - \frac{\ln a}{a}}{2a - a} = \frac{\frac{\ln(2a) - 2\ln a}{2a}}{a} = \frac{\ln(2a) - \ln\left(a^2\right)}{2a^2} = \frac{\ln\left(\frac{2a}{a^2}\right)}{2a^2} = \frac{\ln\left(\frac{2}{a}\right)}{2a^2}.$$

Para que o triângulo retângulo definido pela reta PQ e pelos eixos coordenados seja isósceles é preciso que o valor absoluto da ordenada na origem da reta PQ seja igual à abcissa do ponto em que a reta interseta o eixo Ox. Assim, o declive da reta nestas condições é igual a 1.

Então, $\dfrac{\ln\left(\frac{2}{a}\right)}{2a^2} = 1$ ou $\dfrac{\ln\left(\frac{2}{a}\right)}{2a^2} - 1 = 0$.

Para mostrar que esta equação tem pelo menos uma solução no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ consideramos a função f definida por, $f(a) = \frac{\ln\left(\frac{2}{a}\right)}{2a^2} - 1$.

Calculemos $f\left(\frac{1}{2}\right)$ e $f(1)$:

- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln\left(\frac{2}{\frac{1}{2}}\right)}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2} - 1 = \frac{\ln(4)}{2 \times \frac{1}{4}} - 1 = \frac{\ln(4)}{\frac{1}{2}} - 1 = 2\ln(4) - \ln(e) =$

  $= \ln(4^2) - \ln(e) = \ln\left(\frac{4^2}{e}\right) > 0$, porque $\frac{4^2}{e} > 1$.

- $f(1) = \frac{\ln\left(\frac{2}{1}\right)}{2(1)^2} - 1 = \frac{\ln(2)}{2} - 1 = \frac{1}{2}\ln(2) - 1 = \ln\left(\sqrt{2}\right) - \ln(e) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{e}\right) < 0$,

  porque $\frac{\sqrt{2}}{e} < 1$.

Logo, como $f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(1) < 0$ e a função f é contínua em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, pelo corolário do teorema de Bolzano conclui-se que a função f tem pelo menos um zero em $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

Assim, a equação $\frac{\ln\left(\frac{2}{a}\right)}{2a^2} = 1$ tem pelo menos uma solução no intervalo $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, o que prova a existência de um número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ para o qual o triângulo referido é isósceles, como queríamos demonstrar.

FIM