Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 635) – 2ª FASE – 20 DE JULHO 2018

CADERNO 1

1.

1. 1. **P2001/2002**

Como se trata de uma distribuição normal temos que:

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$.

Logo, sabendo que a distribuição normal é simétrica, vem: $P(X < \mu - 2\sigma) \approx \dfrac{1 - 0{,}9545}{2}$.

Assim, conclui-se que: $P(X > \mu - 2\sigma) \approx 1 - \dfrac{1 - 0{,}9545}{2}$, ou seja, $P(X > m - 2s) \approx 0{,}977$.

A resposta correta é a opção (**C**).

1. 2. **PMC2015**

Dado que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º, concluí-se que:

$A\hat{C}B = 180^\circ - 57^\circ - 81^\circ \Leftrightarrow A\hat{C}B = 42^\circ$.

Assim, aplicando a lei dos senos, temos que:

$$\frac{\operatorname{sen}(42^\circ)}{\overline{AB}} = \frac{\operatorname{sen}(81^\circ)}{5} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{\operatorname{sen}(42^\circ) \times 5}{\operatorname{sen}(81^\circ)} \Leftrightarrow \overline{AB} \approx 3{,}39 .$$

A resposta correta é a opção: (**C**)

2.

Seja B o acontecimento: “o atleta pratica basquetebol” e F o acontecimento: “o atleta pratica futebol”.

Assim, $P(B) = \frac{1}{5}$, $P(F) = \frac{2}{5}$ e $P(\overline{B} \mid \overline{F}) = \frac{3}{4}$.

Então,

$$P(\overline{B} \mid \overline{F}) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{B} \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{B \cup F})}{1 - P(F)} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1 - P(B \cup F)}{1 - P(F)} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - P(B) - P(F) + P(B \cap F)}{1 - P(F)} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \frac{1}{5} - \frac{2}{5} + P(B \cap F)}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{2}{5} + P(B \cap F)}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5} + P(B \cap F) = \frac{9}{20} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B \cap F) = \frac{1}{20}$$

Como a probabilidade é diferente de zero existe pelo menos um atleta que pratica as duas modalidades.

3.

3.1.

Como os códigos têm de começar por uma vogal há 5 maneiras de escolher o primeiro carácter. Para cada uma destas, existem ${}^9A_3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$ maneiras de colocar os três algarismos diferentes escolhidos de entre os 9 indicados.

Assim, podem-se formar $5 \times {}^9A_3 = 5 \times 504 = 2520$ códigos diferentes nas condições do enunciado.

A resposta correta é a opção: (**D**)

3. 2.

Usando a Regra de Laplace, para determinar a probabilidade pedida, temos de calcular o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis.

O número total de códigos de quatro caracteres, repetidos ou não, que é possível formar com os catorze caracteres é igual a $^{14}A'_4 = 14^4 = 38416$, pelo que o número de casos possíveis é 38416.

O produto dos algarismos de um número, com quatro algarismos diferentes, é um número ímpar se esses algarismos forem ímpares. Como existem cinco algarismos ímpares 1, 3, 5, 7 e 9, então o número de casos favoráveis é igual a $^{5}A_4 = 120$.

Assim, a probabilidade de um código ser constituído por quatro algarismos diferentes cujo produto seja um número ímpar, é dada por: $p = \dfrac{120}{38416}$.

Então, a probabilidade pedida é $p \approx 0{,}003$.

4.

4. 1.

Pretende-se determinar uma equação cartesiana do plano que passe no ponto P e seja perpendicular à reta r.

Sendo P um ponto de coordenadas da forma $P\left(1, 3, z\right)$, com $z < 0$ que pertence à superfície esférica de equação $\left(x-1\right)^2 + \left(y-2\right)^2 + \left(z+1\right)^2 = 10$, vem:

$$\left(1-1\right)^2 + \left(3-2\right)^2 + \left(z+1\right)^2 = 10 \Leftrightarrow 1 + \left(z+1\right)^2 = 10 \Leftrightarrow \left(z+1\right)^2 = 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z+1 = 3 \vee z+1 = -3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z = 2 \vee z = -4$$

Assim, $P\left(1, 3, -4\right)$, pois a sua cota é negativa.

Um vetor normal ao plano pode ser um vetor diretor da reta r, por exemplo $\vec{r}\left(4, 1, -2\right)$.

O plano que passa por P e tem vetor normal $\vec{r}\left(4, 1, -2\right)$ é definido por uma equação da forma $4x + y - 2z + d = 0$, sendo d um número real.

Como P tem coordenadas $\left(1, 3, -4\right)$, tem-se:

$$4 \times 1 + 3 - 2 \times \left(-4\right) + d = 0 \Leftrightarrow 15 + d = 0 \Leftrightarrow d = -15.$$

Assim, uma equação cartesiana do plano que passa por P e é perpendicular à reta r é: $4x + y - 2z - 15 = 0$.

4. 2.

O ângulo AOC é formado pelos vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$.

Como o ponto C é o centro da superfície esférica, tem coordenadas $C\left(1, 2, -1\right)$. O ponto A, simétrico de C relativamente ao plano xOy, tem coordenadas $A\left(1, 2, 1\right)$.

Sendo α a amplitude do ângulo AOC, tem-se: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OC}\right\|}$.

Por outro lado, tem-se:

$$\overrightarrow{OA} = A - O = \left(1, 2, 1\right) - \left(0, 0, 0\right) = \left(1, 2, 1\right)$$

$$\overrightarrow{OC} = C - O = \left(1, 2, -1\right) - \left(0, 0, 0\right) = \left(1, 2, -1\right)$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \left(1, 2, 1\right) \cdot \left(1, 2, -1\right) = 4$$

$$\left\| \overrightarrow{OA} \right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6} \quad \text{e} \quad \left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + \left(-1\right)^2} = \sqrt{6}$$

Logo, $\cos\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{2}{3}$.

Sendo $\alpha \in \left[0, \pi\right]$ em graus, a amplitude do ângulo AOC, arredondado às unidades, é: $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right) \Rightarrow \alpha \approx 48^{\circ}$.

Assim, a amplitude do ângulo AOC é aproximadamente 48º.

5.

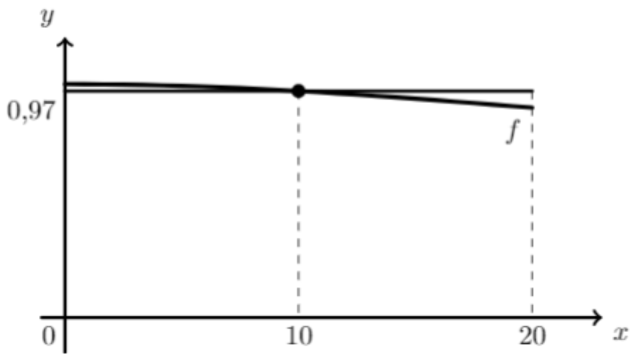
No primeiro instante considerado a amplitude do ângulo ASM é α e a distância de Mercúrio ao Sol é $d\left(\alpha\right) = \dfrac{555}{10 - 2{,}06\cos\alpha}$.

Relativamente ao segundo instante considerado, a amplitude do ASM é três vezes maior, ou seja, 3α, e a distância respetiva é $d\left(3\alpha\right) = \dfrac{555}{10 - 2{,}06\cos\left(3\alpha\right)}$. Além disso, sabemos que, neste segundo instante, a distância do planeta Mercúrio ao Sol diminuiu 3%, ou seja é igual a 97% da distância anterior. Assim:

$$d\left(3\alpha\right) = 0{,}97\, d\left(\alpha\right) \Leftrightarrow \frac{555}{10 - 2{,}06\cos\left(3\alpha\right)} = 0{,}97 \times \frac{555}{10 - 2{,}06\cos\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{10 - 2{,}06\cos\alpha}{10 - 2{,}06\cos\left(3\alpha\right)} = 0{,}97$$

Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, representamos, para $0 < x < 20$ (porque α está compreendido entre 0 e 20), o gráfico correspondente a $f(x) = \dfrac{10 - 2{,}06\cos x}{10 - 2{,}06\cos(3x)}$ e a reta horizontal de equação $y = 0{,}97$.



Usando a função da calculadora para determinar os valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às unidades do grau) da abcissa do ponto de interseção, ou seja, $\alpha \approx 10^{\circ}$.

6.

Para calcular a abcissa do único ponto de inflexão comecemos por determinar a expressão da segunda derivada da função f :

$$f''(x) = (3x - \operatorname{tg} x)' = 3 - \frac{1}{\cos^2 x} .$$

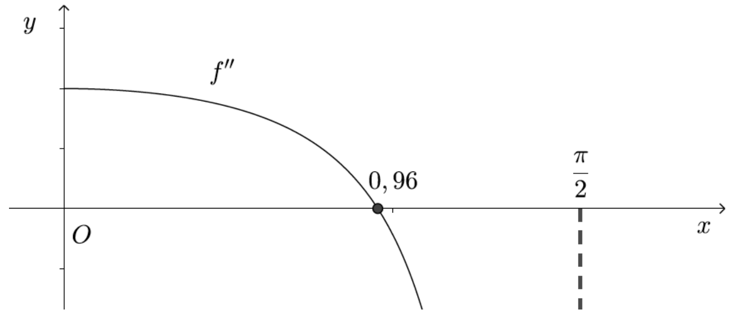
Calculando os zeros da segunda derivada temos:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 3 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} .$$

Mas como a função está definida no intervalo $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ o $\cos x$ é positivo.

Logo, $\cos x = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$, pelo que a amplitude do ângulo x , em radianos, arredondado às centésimas, é: $x = \cos^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right) \Rightarrow x \approx 0{,}96$.

Como a segunda derivada tem um único zero neste intervalo e à esquerda deste valor a segunda derivada é positiva e à direita é negativa, como se pode observar no gráfico, então 0,96 é o valor pedido.



A resposta correta é a opção (**D**)

7.

Seja r, com $r \in \mathbb{R}$, a razão da progressão aritmética (u_n). Assim, tem-se que:

- $u_3 = u_1 + 2r \Leftrightarrow u_1 = u_3 - 2r$, como $u_3 = 4$ vem $u_1 = 4 - 2r$;
- $u_{12} = u_3 + 9r \Leftrightarrow u_{12} = 4 + 9r$.

Portanto, como $S_{12} = \dfrac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12$, temos:

$$S_{12} = 174 \Leftrightarrow \frac{4 - 2r + 4 + 9r}{2} \times 12 = 174 \Leftrightarrow (7r + 8) \times 6 = 174 \Leftrightarrow 7r + 8 = \frac{174}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7r = 29 - 8 \Leftrightarrow r = \frac{21}{7} \Leftrightarrow r = 3$$

Logo, como o termo geral da progressão aritmética (u_n) é dado por $u_n = u_3 + (n-3) \times r$, vem que:

$$u_n = 4 + (n-3) \times 3 = 4 + 3n - 9 = 3n - 5$$

Vejamos então se existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $u_n = 5371$:

$$u_n = 5371 \Leftrightarrow 3n - 5 = 5371 \Leftrightarrow 3n = 5376 \Leftrightarrow n = \frac{5376}{3} \Leftrightarrow n = 1792$$

Conclui-se que 5376 é o termo de ordem 1792 da progressão aritmética (u_n).

8.

Os pontos A, B, C, D e E são afixos dos complexos que são as raízes quintas de um dado número complexo e pertencem à circunferência centrada na origem e de raio 1.

Os cinco respetivos argumentos estão em progressão aritmética de razão $\dfrac{2\pi}{5}$.

Por hipótese, sabemos que C é o afixo do complexo $z_C = 1e^{i\pi}$.
Assim,

$$Arg(z_C) = Arg(z) + 2 \times \frac{2\pi}{5}$$

$$\pi = Arg(z) + \frac{4\pi}{5}$$

$$Arg(z) = \frac{\pi}{5}$$

Donde, $z = 1e^{i\frac{\pi}{5}}$

Pela fórmula de Moivre, temos

$$z^5 = \left(1e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^5 = (1)^5 e^{i \times 5 \times \frac{\pi}{5}} = 1e^{i\pi} = -1 .$$

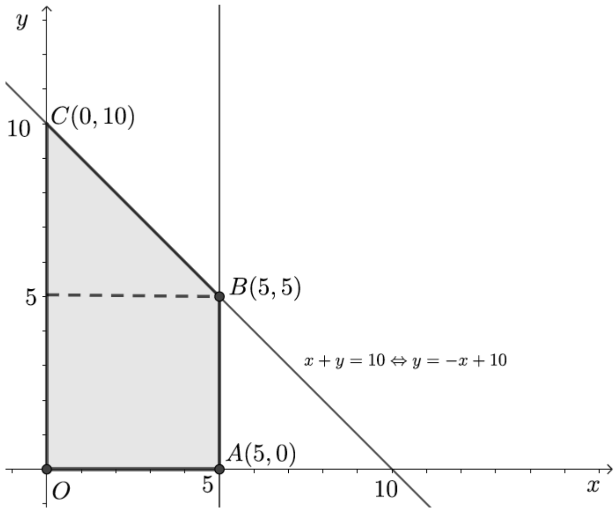
A resposta correta é a opção (**A**).

CADERNO 2

9.

9. 1. $\boxed{\textbf{P2001/2002}}$

Comecemos por representar a região D, região admissível deste problema de Programação Linear:



Fazendo $x=0$ na equação $x+y=10$, vem que $y=10$, pelo que a reta de equação $x+y=10$ intersecta o eixo Oy no ponto $C(0,10)$ e fazendo $x=5$ na equação $x+y=10$, vem que $y=5$, pelo que as retas de equações $x+y=10$ e $x=5$ se intersetam no ponto $B(5,5)$.

Finalmente, para $L=0$, tem-se que $0=3x+5y \Leftrightarrow y=-\frac{3}{5}x$, pelo que a reta de equação $y=-\frac{3}{5}x$ (reta de nível 0), não é paralela a nenhum dos lados do polígono $[OABC]$ e portanto a solução óptima deste problema é atingida num dos seus vértices (pretende-se maximizar a função objectivo).

Assim, calculando o valor da função objetivo para cada um dos vértices considerados, temos:

Vértice	$L=3x+5y$
$A(5,0)$	$L=3\times5+5\times0=15$
$B(5,5)$	$L=3\times5+5\times5=40$
$C(0,10)$	$L=3\times0+5\times10=50$

Portanto, o valor máximo que a função objectivo alcança na região admissível dada pelo sistema é 50.

A resposta correta é a opção (**B**)

9. 2. $\boxed{\textbf{PMC2015}}$

Tem-se que:

- $\overline{F_1F_2} = 2c$ (distância focal), pelo que $\overline{F_1F_2} = 12 \Leftrightarrow 2c = 12 \Leftrightarrow c = 6$
- $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ (eixo maior), pelo que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 20 \Leftrightarrow 2a = 20 \Leftrightarrow a = 10$
- $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 10^2 = b^2 + 6^2 \Leftrightarrow 100 - 36 = b^2 \Leftrightarrow b^2 = 64$

A equação reduzida da elipse é da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, sendo a o semi-eixo maior e b o semi-eixo menor. Assim, como $a^2 = 100$ e $b^2 = 64$, a equação reduzida da elipse da figura é $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.

A resposta correta é a opção (**B**)

10.

Comecemos por simplificar z,

$$z = \frac{(2-i)^2 + 1 + i}{1-2i} + 3i^{15} \Leftrightarrow z = \frac{4 - 4i + i^2 + 1 + i}{1-2i} + 3i^3 \Leftrightarrow z = \frac{4 - 4i - 1 + 1 + i}{1-2i} - 3i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{4-3i}{1-2i} - 3i \Leftrightarrow z = \frac{(4-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} - 3i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{4 + 8i - 3i - 6i^2}{1 - 4i^2} - 3i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{10 + 5i}{1+4} - 3i \Leftrightarrow z = 2 + i - 3i \Leftrightarrow z = 2 - 2i$$

Assim, $-\frac{1}{2} \times \overline{z} = -\frac{1}{2} \times (2 + 2i) = -1 - i$.

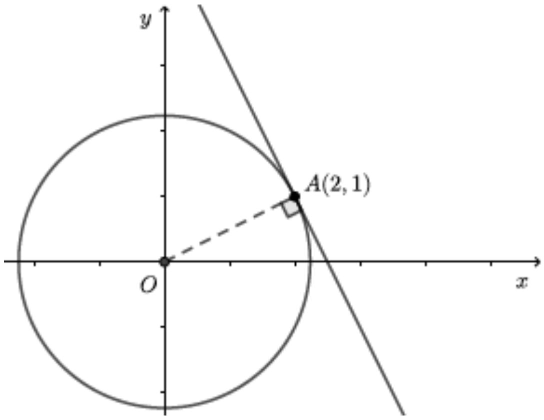
Escrevendo $-1 - i = w$ na forma trigonométrica, temos que $w = -1 - i = re^{i\theta}$, onde:

- $r = |-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{-1}{-1} = 1$, como o afixo de $-1 - i$ pertence ao 3º Q., θ pertence ao 3º Q..

Logo, $\theta = \frac{5\pi}{4}$ e $w = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$.

11.

A reta r é tangente à circunferência de centro na origem no ponto A, pelo que é perpendicular à recta OA:



Como $\overrightarrow{OA} = A - O = (2,1) - (0,0) = (2,1)$, então o declive da reta OA é $m_{OA} = \frac{1}{2}$ e portanto o declive da reta r é dado por $m_r = -\frac{1}{m_{OA}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$.

Logo, uma equação da reta r será $y = -2x + b$, sendo b a ordenada na origem.

Como o ponto A também pertence à reta r, substituindo na sua equação, obtém-se o valor de b, ou seja, $1 = -2 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 5$.

A resposta correta é a opção (**B**)

12.

12. 1. $\boxed{\textbf{P2001/2002}}$

Fazendo a intersecção dos três planos, vem que:

$$\begin{cases} y = -x \\ y = z \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = z \\ 2(-y) + 3y - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = z \\ -2y + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = z \\ -1 = 0, \text{ proposição falsa} \end{cases}$$

o sistema é impossível de onde se conclui que a interseção dos três planos é o conjunto vazio.

A resposta correta é a opção (**D**)

12. 2. $\boxed{\textbf{PMC2015}}$

Tem-se que:

$$\lim\left(\frac{n+5}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim\left[\left(\frac{n\left(1+\frac{5}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\lim\frac{\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{e^5}{e^1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(e^{5-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(e^4\right)^{\frac{1}{2}} = e^2$$

A resposta correta é a opção (**D**)

13.

Comecemos por determinar o domínio onde é valida a inequação:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : x+1>0 \ \wedge \ 8-x>0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x>-1 \ \wedge \ x<8\right\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} : -1<x<8\right\} = \left]-1, 8\right[$$

Resolvendo a inequação, temos que:

$$\log_2\left(x+1\right) \le 3 - \log_2\left(8-x\right) \Leftrightarrow \log_2\left(x+1\right) + \log_2\left(8-x\right) \le \log_2\left(2^3\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\left(x+1\right)\left(8-x\right)\right) \le \log_2 8 \Leftrightarrow 8x - x^2 + 8 - x \le 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x - x^2 \le 0$$

Como $7x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x\left(7-x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ 7-x=0 \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=7$, temos que:

x	-1		0		7		8
x	n. d.	$-$	0	$+$	$+$	$+$	n. d.
$7-x$	n. d.	$+$	$+$	$+$	0	$-$	n. d.
$7x-x^2$	n. d.	$-$	0	$+$	0	$-$	n. d.

Pelo que o conjunto dos números reais que são solução da inequação é: $\left]-1, 0\right] \cup \left[7, 8\right[$.

14.

14. 1.

Tem-se que: $f\left(0\right)=3+\dfrac{e^{0}}{1-0}=3+\dfrac{1}{1}=3+1=4$, pelo que:

$$f'\left(0\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{3+\dfrac{e^{x}}{1-x}-4}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^{x}}{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^{x}-1+x}{1-x}}{x}=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1+x}{x\left(1-x\right)}}_{\text{indeterminação}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x\left(1-x\right)}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(1-x\right)}=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}}_{\text{limite notável}}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}=1\times\frac{1}{1-0}+\frac{1}{1-0}=1+1=2$$

De onde se conclui que a derivada da função f no ponto de abcissa 0 é 2.

14. 2.

Determinemos:

- $$\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(3+\frac{e^{x}}{1-x}\right)=3+\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}}{1-x}=3+\frac{e^{-\infty}}{1-\left(-\infty\right)}=$$

$$=3+\frac{0}{1+\infty}=3+\frac{0}{+\infty}=3+0=3$$

Logo, reta de equação $y=3$ é assíntota horizontal do gráfico de f , quando $x\to-\infty$.

- $$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{2}\right)+2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=$$

$$=2\times\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\text{limite notável}}+\frac{2}{+\infty}=2\times 0+0=0$$

Logo, reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de f , quando $x\to+\infty$.

14.3.

Tem-se que: $\left(f\circ h^{-1}\right)\left(2\right)=f\left(h^{-1}\left(2\right)\right)$.

Assim, $h\left(x\right)=2\Leftrightarrow x+1=2\Leftrightarrow x=1$ logo $h\left(1\right)=2\Leftrightarrow h^{-1}\left(2\right)=1$. Dado que h é bijetiva então admite inversa.

Logo, $\left(f\circ h^{-1}\right)\left(2\right)=f\left(h^{-1}\left(2\right)\right)=f\left(1\right)=\dfrac{\ln\left(1^{2}\right)+2}{1}=\ln 1+2=0+2=2$.

A resposta correta é a opção (**C**)

15.

Para calcular o declive da reta tangente, que tem o declive máximo temos que determinar o valor para o qual a derivada é máxima. Para o efeito comecemos por determinar a expressão da segunda derivada da função, bem como os seus zeros elaborando de seguida um quadro de sinal.

$g(x) = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$

$g'(x) = \left(2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x\right)' = 2\cos x + 2\operatorname{sen} x \cos x$

$$g''(x) = \left(2\cos x + 2\operatorname{sen} x \cos x\right)' = 2(-\operatorname{sen} x) + 2\cos x \cos x + 2\operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x) =$$
$$= -2\operatorname{sen} x + 2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x = -2\operatorname{sen} x + 2\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) - 2\operatorname{sen}^2 x =$$
$$= -2\operatorname{sen} x + 2 - 2\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x = -4\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x + 2$$

Determinando os zeros da segunda derivada:

$-4\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x + 2 = 0$

Considerando $\operatorname{sen} x = y$ temos:

$$-4y^2 - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{-8} \Leftrightarrow y = \frac{2 \pm 6}{-8} \Leftrightarrow y = -1 \vee y = \frac{1}{2}$$

Ou seja, $\operatorname{sen} x = -1 \vee \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$.

Mas, como o domínio da função é $[0, \pi]$ só consideramos os valores em que o seno é positivo.

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como se pretendem os valores pertencentes ao intervalo $[0, \pi]$ vamos atribuir valores inteiros a k.

Para $k = 0$ vem $x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$.

Estudando a variação do sinal da função derivada de segunda ordem e relacionando-o com a monotonia da função derivada de primeira ordem, temos:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f''(x)$	2	+	0	−	0	+	2
$f'(x)$	Min	↗	Máx	↘	Min	↗	Máx

A função derivada tem dois máximos relativos. Calculando os seus valores temos:

$g'(\pi) = 2\cos\pi + 2\operatorname{sen}\pi\cos\pi = 2\times(-1) + 2\times 0\times(-1) = -2$

$$g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Logo o valor do declive da reta que tem o declive máximo é $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

FIM