Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

# PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO

## (CÓDIGO DA PROVA 635) – 1ª FASE – 25 DE JUNHO 2019

## CADERNO 1

**1.**

**1.1.**

O ângulo $VAC$ é formado pelos vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AV}$.

As coordenadas dos pontos $A$, $C$ e $V$ são, respetivamente, $A(2,1,0)$; $C(0,-1,2)$ e $V(3,-1,2)$.

Sendo $\alpha$ a amplitude do ângulo $VAC$, temos $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AV}}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AV}\right\|}$ pelo que:

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AV} = -2+4+4=6$; $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; $\left\|\overrightarrow{AV}\right\| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$.

Assim, $\cos\alpha = \dfrac{6}{6\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, e como $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 55^{\circ}$ a amplitude do ângulo $VAC$ é aproximadamente 55º (0 c.d.).

**1.2.**

Determinamos a equação do plano da base da pirâmide considerando o vetor, $\overrightarrow{VM}$, perpendicular à base, isto é, normal ao plano da base, em que o ponto $M$ é o centro da base e ponto médio de $[CA]$.

Então,

$M\left(\dfrac{2+0}{2}, \dfrac{1-1}{2}, \dfrac{0+2}{2}\right) = (1,0,1)$ e $\overrightarrow{VM} = M - V = (1,0,1)-(3,-1,2) = (-2,1,-1)$.

O plano que contém a base da pirâmide é da família $-2x+y-z+d=0$.

Considerando que o ponto $A$ pertence ao plano, podemos determinar $d$ substituindo as coordenadas do ponto $A$ na equação $-2x+y-z+d=0$.

Deste modo, $-4+1+d=0 \Leftrightarrow d=3$.

Assim, a equação do plano que contém a base da pirâmide é $-2x+y-z+3=0$.

**2.**

**2.1.** **P2001/2002**

Como se trata de uma distribuição normal temos $P\left( \mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma \right) \approx 0{,}9545$ .

Neste caso particular, $\mu = 5$ e $\sigma = \frac{1}{2}$ . Sabendo que a distribuição normal é simétrica, vem:

$P\left( X > 6 \right) \approx \frac{1 - 0{,}9545}{2} \approx 0{,}023$ (3 c.d.).

A resposta correta é a opção (**C**).

**2. 2.** **PMC2015**

Uma vez que, $\lim \left( \frac{n-2}{n} \right)^{3n} = \lim \left( \left( 1 - \frac{2}{n} \right)^{n} \right)^{3} = \left( \lim \left( 1 - \frac{2}{n} \right)^{n} \right)^{3} = \left( e^{-2} \right)^{3} = \frac{1}{e^{6}}$ , então:

A resposta correta é a opção (**C**).

**3.**

**3.1.**

Seja $A$ o acontecimento: "ser uma bola amarela" e $B$ o acontecimento: "ser uma bola com o logotipo desenhado".

Como sabemos que $P\left( \overline{A} \cup \overline{B} \right) = \frac{15}{16}$ então,

$P\left( \overline{A} \cup \overline{B} \right) = \frac{15}{16} \Leftrightarrow P\left( \overline{A \cap B} \right) = \frac{15}{16} \Leftrightarrow P\left( A \cap B \right) = 1 - \frac{15}{16} \Leftrightarrow P\left( A \cap B \right) = \frac{1}{16}$ .

Considerando $n$ o número de bolas existentes na caixa e como existem nessa caixa três bolas amarelas com o logotipo desenhado, a probabilidade de uma bola dessa caixa ser amarela e ter o logotipo desenhado é dado pela expressão: $P\left( A \cap B \right) = \frac{3}{n}$ .

Assim, $\frac{3}{n} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow n = 48$ .

Logo, a caixa contém 48 bolas.

**3.2.**

Usando a Regra de Laplace, para determinar a probabilidade pedida, temos de calcular o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis.

Quando as dez bolas amarelas se dispõem lado a lado o número total de maneiras das três bolas com o logotipo desenhado se colocarem nessa linha reta é igual a ${}^{10}C_3$, número de casos possíveis.

O número de casos favoráveis, ou seja o número total de maneiras de as três bolas com o logotipo desenhado ficarem juntas é 8.

Assim, a probabilidade de as três bolas com o logotipo desenhado ficarem juntas é dado por:

$$p = \frac{8}{{}^{10}C_3} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}.$$

A resposta correta é a opção **(B)**.

**4.**

Com o número a começar em 6 e a terminar em 7 temos ${}^{5}C_2 = 10$ números diferentes.

Com o número a começar em 7 e a terminar em 5 temos ${}^{5}C_4 \times 1 = 5$ números diferentes.

Com o número a começar em 6 e a terminar em 5 temos ${}^{5}C_3 \times 2 = 20$ números diferentes.

Assim, no total temos, 35 números nas condições pedidas.

**5.**

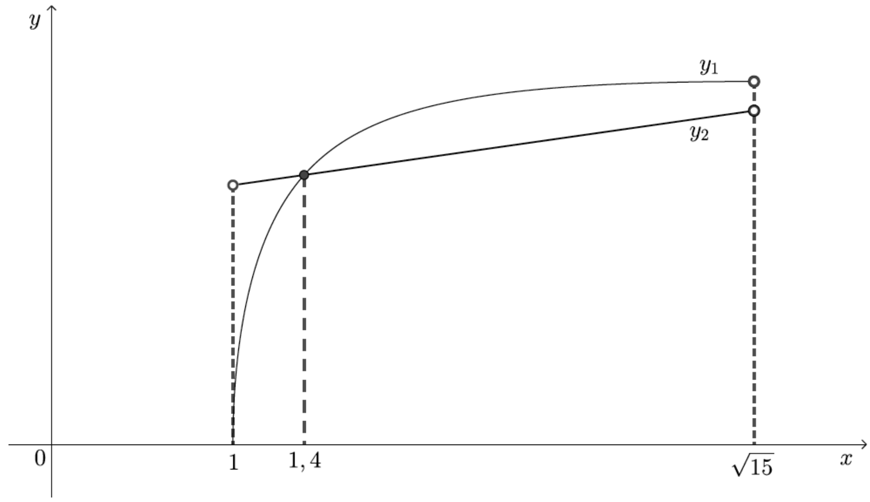
Sabe-se que, $d$ (diâmetro da lente) excede em $9mm$ a distância $x$, em que $x = \overline{C_1C_2}$, então $d(x) = x + 9$.

Como $r_1 = 7mm$ e $r_2 = 8mm$, conclui-se que:

$$d(x) = \frac{\sqrt{\left((7+8)^2 - x^2\right)\left(x^2 - (8-7)^2\right)}}{x} \Leftrightarrow d(x) = \frac{\sqrt{\left(225 - x^2\right)\left(x^2 - 1\right)}}{x}$$

A equação que permite resolver o problema é $\frac{\sqrt{\left(225 - x^2\right)\left(x^2 - 1\right)}}{x} = x + 9$.

Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica representamos, de acordo com a janela $\left]1, \sqrt{15}\right[$, a curva correspondente a $y_1 = \frac{\sqrt{\left(225 - x^2\right)\left(x^2 - 1\right)}}{x}$ e a reta de equação $y_2 = x + 9$.




Usando a função da calculadora gráfica para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de intersecção dos dois gráficos, obtemos um valor aproximado da abcissa do ponto de interseção: 1,4 (1 c.d.).

**6.**

Como $z = -1 + 2i$ logo $\overline{z} = -1 - 2i$.

Sendo assim, o afixo de $\overline{z}$ encontra-se no 3.º quadrante.

Como $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1$ e $\operatorname{tg}(\theta) = \frac{-2}{-1} = 2$ e $2 > 1$, então $\frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

A resposta correta é a opção (**D**).

**7.**

Sejam $a$ e $b$ os dois termos consecutivos da referida progressão geométrica de razão $r$, com $r > 1$ e $a < b$, tais que $a + b = 12$ e que $b - a = 3$.

Portanto, tendo então em conta que $a$ e $b$ são dois termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão $r$ e $a < b$, tem-se que $b = ar$, pelo que:

$$\begin{cases} a+b=12 \\ b-a=3 \end{cases} \underset{b=ar}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a+ar=12 \\ ar-a=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+a+3=12 \\ ar=a+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=9 \\ ar=a+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{9}{2} \\ \frac{9}{2}r=\frac{9}{2}+3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{9}{2} \\ 9r=9+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{9}{2} \\ r=\frac{15}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{9}{2} \\ r=\frac{5}{3} \end{cases}$$

Portanto, $r = \frac{5}{3}$.

**8.**

Sabendo que $a+b=2(a-b),\ a>b$, temos que:

$$\ln\left(a^2-b^2\right)-2\ln\left(a+b\right)=\ln\left(\frac{a^2-b^2}{\left(a+b\right)^2}\right)=\ln\left(\frac{a-b}{a+b}\times\frac{a+b}{a+b}\right)=\ln\left(\frac{a-b}{a+b}\right)=\ln\left(\frac{a-b}{2\left(a-b\right)}\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{1}{2}\right)\approx -0,7\,(1\,\text{c.d.})$$

A resposta correta é a opção (**C**).

## CADERNO 2

**9.**

**9.1.** P2001/2002

Uma equação que define:

o plano $\alpha$ é: $x+y+z=1$

o plano $\beta$ é : $2x+2y+2z=1$

o plano $\gamma$ é: $x+y=0$

Um exemplo de um vetor normal aos planos $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ é, respetivamente:

$$\vec{a}=\left(1,1,1\right);\quad \vec{b}=\left(2,2,2\right)\ \text{e}\ \ \vec{c}=\left(1,1,0\right)$$

Como os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são colineares, os planos $\alpha$ e $\beta$ são paralelos e, pelo facto de as equações $x+y+z=1$ e $2x+2y+2z=1$ não serem equivalentes, concluímos que os planos são estritamente paralelos.

Uma vez que dois dos planos são estritamente paralelos a interseção dos planos $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ é o conjunto vazio.

A resposta correta é a opção (**A**).

**9. 2.** PMC2015

Sabemos que a distância focal, $2c$, e o eixo menor da elipse, $2b$, são iguais ao diâmetro do círculo.

Como a área do círculo é igual a $9\pi$, concluímos que o raio da círculo é 3.

Assim, $2b=2c=6$, logo $b=c=3$.

Além disso, sabemos que $a^2=b^2+c^2 \Leftrightarrow a^2=9+9 \Leftrightarrow a^2=18$, onde $a$ é a medida do semieixo maior, pelo que a equação reduzida que define a elipse é: $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

A resposta correta é a opção (**A**).

**10.**

Seja

$$w=\frac{z_1+i^6+2\overline{z_1}}{z_1-z_2}=\frac{3+4i+i^2+2\left(3-4i\right)}{3+4i-\left(4+6i\right)}=\frac{3+4i-1+6-8i}{-1-2i}=\frac{8-4i}{-1-2i}=$$

$$=\frac{\left(8-4i\right)\left(-1+2i\right)}{\left(-1-2i\right)\left(-1+2i\right)}=\frac{-8+4i+16i+8}{1+4}=\frac{20i}{5}=4i$$

Então, $\left|w\right|=\sqrt{0^2+4^2}=4$.

Assim, $\left|z\right|=4$ representa no plano complexo a circunferência de centro na origem de raio 4.

Como $\text{Im}(z)\geq 0 \wedge \text{Re}(z)\geq 0$, a linha definida pela condição $\left|z\right|=4 \wedge \text{Im}(z)\geq 0 \wedge \text{Re}(z)\geq 0$ é o arco dessa circunferência que pertence ao primeiro quadrante, incluindo os pontos sobre os eixos coordenados, ou seja um quarto da circunferência.

O comprimento da circunferência é dado por: $P=2\times\pi\times 4=8\pi$.

Logo, o comprimento da linha pedido é $\frac{8\pi}{4}=2\pi$.

**11.**

Resolvendo a equação:

$$2\cos\left(x\right)+1=0 \Leftrightarrow 2\cos\left(x\right)=-1 \Leftrightarrow \cos\left(x\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \vee \ x=\pi+\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \vee \ x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Como $x\in\left[-\pi,0\right]$, vamos descobrir as soluções da equação atribuindo valores inteiros a $k$.

Se $k=0$, então $x=\frac{2\pi}{3} \vee x=\frac{4\pi}{3}$. Nenhum destes valores pertence a $\left[-\pi,0\right]$.

Se $k=-1$, então $x=-\frac{4\pi}{3} \vee x=-\frac{2\pi}{3}$. Apenas $-\frac{2\pi}{3}$ pertence a $\left[-\pi,0\right]$.

Se $k=-2$, então $x=-\frac{10\pi}{3} \vee x=-\frac{8\pi}{3}$. Nenhum destes valores pertence a $\left[-\pi,0\right]$.

Logo, a única solução da equação é $-\frac{2\pi}{3}$.

A resposta correta é a opção (**B**).

**12.**

**12.1.** $\boxed{\textbf{P2001/2002}}$

Construindo uma tabela de dupla entrada com todas as somas possíveis, temos:

| + | −1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| −1 | −2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

Logo, $X = \{-2, 0, 2\}$ em que $P(X = -2) = \frac{1}{36}$, $P(X = 0) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ e $P(X = 2) = \frac{25}{36}$.

Portanto, $k = 0$.

A resposta correta é a opção (**A**).

**12.2.** $\boxed{\textbf{PMC2015}}$

A pulsação, $\omega$, deste oscilador harmónico é $\pi$. Como o período é dado por $\frac{2\pi}{\omega}$, vem que o período deste oscilador harmónico é $\frac{2\pi}{\pi} = 2$.

A resposta correta é a opção (**A**).

**13.**

**13.1.**

Tem-se que, para $x>0$, $f(x)=\dfrac{x}{x-\ln x}$.

Seja $t$ a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa 1. Assim, o declive da reta $t$ é dado por $f'(1)$ e as coordenadas do ponto de tangência são $\left(1, f(1)\right)$.

Então:

- $f(1)=\dfrac{1}{1-\ln(1)}=\dfrac{1}{1-0}=1$, pelo que as coordenadas do ponto de tangência são $(1,1)$;

- $f'(x)=\dfrac{x'(x-\ln x)-x(x-\ln x)'}{(x-\ln x)^2}=\dfrac{1\times(x-\ln x)-x\times\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2}=\dfrac{x-\ln x-x+\dfrac{x}{x}}{(x-\ln x)^2}=\dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$

Logo, o declive da reta $t$ é $f'(1)=\dfrac{1-\ln(1)}{\left(1-\ln(1)\right)^2}=\dfrac{1-0}{(1-0)^2}=\dfrac{1}{1^2}=1$ e, portanto, a equação reduzida da reta $t$ é da forma $y=x+b$. Como o ponto de coordenadas $(1,1)$ pertence a $t$, substituindo na equação anterior, vem: $1=1+b \Leftrightarrow b=0$

A equação reduzida da reta $t$ é $y=x$.

**13.2.**

Para averiguar se a função $f$ é contínua em $x=0$, temos que verificar se $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

- $f(0)=0$;
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x-\ln x}=\dfrac{0}{0-\ln(0^+)}=\dfrac{0}{0-(-\infty)}=\dfrac{0}{+\infty}=0$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\cos x}{x}=\dfrac{0}{0}$ (indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1-\cos x}{x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}\right)=\underbrace{\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}_{\text{limite notável}}\times\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)=$$

$$=1\times\frac{\operatorname{sen}(0)}{1+\cos(0)}=1\times\frac{0}{1+1}=0$$

Como $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$, então a função $f$ é contínua em $x=0$.

**14.**

**14.1.**

Comecemos por determinar a expressão analítica da derivada de $g$ e os seus zeros:

- $g'(x)=\dfrac{\left(e^{-x}\right)'\times x-e^{-x}\times x'}{x^2}=\dfrac{-e^{-x}\times x-e^{-x}}{x^2}=\dfrac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}$
- $g'(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}(-x-1)=0 \ \wedge \ \underbrace{x^2\neq 0}_{\substack{\text{Condição}\\\text{Universal}\\\text{em}\,\mathbb{R}\setminus\{0\}}} \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x}=0}_{\substack{\text{Condição}\\\text{Impossível}}} \ \vee \ -x-1=0 \Leftrightarrow x=-1$

O sinal de $g'$ depende apenas do sinal de $y=-x-1$, pois $e^{-x}>0$ e $x^2>0$ para todo o $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Fazendo um quadro de sinal de $g'$ e relacionando com a monotonia de $g$, vem:

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $0$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | n.d. | $-$ |
| $g(x)$ | $\nearrow$ | máx. | $\searrow$ | n.d. | $\searrow$ |

Logo, a função $g$ é decrescente em $[-1,0[$ e em $]0,+\infty[$, é crescente em $]-\infty,-1]$ e tem um máximo relativo em $x=-1$, que é $g(-1)=\dfrac{e^1}{-1}=-e$.

**14.2.**

O declive da assíntota ao gráfico da função $h$ é dado por $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}$.

Tem-se que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)+2x-\frac{1}{\sqrt{x}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{-x}}{x}}{x}+2-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2\times e^x}+2-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{1}{(+\infty)^2\times(+\infty)}+2-\frac{1}{+\infty\times\sqrt{+\infty}}=0+2-0=2$$

A resposta correta é a opção (**B**).

**15.**

**1.º processo:**

Tomemos dois pontos equidistantes da origem, por exemplo, o ponto $B(3, 4)$ pertencente à reta de equação $y = \frac{4}{3}x$, e o ponto $A(5, 0)$ pertencente ao eixo das abcissas.

Considerando um ponto genérico $P(x, y)$, pertencente à reta r, bissetriz do ângulo $AOB$, tem-se que:

$$\begin{aligned}\overline{AP} = \overline{BP} &\Leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8y = 10x - 25 - 6x + 9 + 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x\end{aligned}$$

**2.º processo:**

Seja $\alpha = A\hat{O}B$. Como o declive da reta $OB$ é $\frac{4}{3}$, tem-se que $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{4}{3}$ e o declive da reta $r$ é dado por $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Assim,

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(2 \times \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(2 \times \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 2 \times \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

(dividindo ambos os termos da fração do primeiro membro por $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$)

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 6 \times \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 4 - 4 \times \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 6\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 4 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 4 \times (-4)}}{8} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-6 \pm 10}{8} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -2 \vee \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Como a reta $r$ tem declive positivo e passa pela origem do referencial, a equação reduzida da reta $r$ é dada por: $y = \frac{1}{2}x$.

**FIM**