

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO
SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 635)
2ª FASE – 22 DE JULHO 2019**

1.

1.1.

O volume do paralelepípedo é dado, por exemplo, por: $V_{[ABCDEFGH]} = \overline{AB} \times \overline{BG} \times \overline{BC}$.

Sabe-se que $A \in Ox$ e $B \in Oy$, pelo que $A(a, 0, 0)$ e $B(0, b, 0)$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Como A pertence ao plano ABC temos:

$$3a + 4 \times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3a = 12 \Leftrightarrow a = \frac{12}{3} \Leftrightarrow a = 4, \text{ logo } A(4, 0, 0).$$

Do mesmo modo como B também pertence ao plano ABC , então

$$3 \times 0 + 4 \times b - 12 = 0 \Leftrightarrow 4b = 12 \Leftrightarrow b = \frac{12}{4} \Leftrightarrow b = 3, \text{ logo } B(0, 3, 0).$$

Assim,

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-4)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5;$$

$$\overline{BG} = \sqrt{(6-0)^2 + (11-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10;$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(0-0)^2 + (3-3)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{6^2} = 6.$$

Então, o volume do paralelepípedo é dado por:

$$V_{[ABCDEFGH]} = \overline{AB} \times \overline{BG} \times \overline{BC} = 5 \times 10 \times 6 = 300 \text{ unidades de volume.}$$

1.2.

Se r passa por P e é perpendicular a ABC , temos que $(3, 4, 0)$ são as coordenadas de um vetor diretor da reta r .

Assim, uma equação vetorial de r é, por exemplo: $(x, y, z) = (1, -4, 3) + k(3, 4, 0)$, $k \in \mathbb{R}$.

Daqui obtemos o seguinte sistema de equações paramétricas:
$$\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = -4 + 4k, k \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 0 \end{cases}$$

Intersectando r com ABC vem

$$3(1 + 3k) + 4(-4 + 4k) - 12 = 0 \Leftrightarrow 3 + 9k - 16 + 16k - 12 = 0 \Leftrightarrow 25k = 25 \Leftrightarrow k = \frac{25}{25} \Leftrightarrow k = 1.$$

Tomando $k = 1$, vem
$$\begin{cases} x = 1 + 3 \times 1 \\ y = -4 + 4 \times 1 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

Concluimos que as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano ABC são $(4, 0, 3)$

1.3.

Número de casos possíveis: ${}^8C_2 = 28$.

Número de casos favoráveis: ${}^4C_2 + {}^4C_2 = 6 + 6 = 12$.

A probabilidade pedida é $P = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$.

2.

2.1.

Seja A o acontecimento : “Ser Rapaz”.

Seja B o acontecimento : “Frequentar o 10.º ano”.

Sabemos que:

$$P(A|B) = \frac{3}{5}, \quad P(A) = \frac{11}{21} \quad \text{e} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{7}.$$

$$\text{Ora, } P(A|B) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{7}}{P(B)} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = P(B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{21}.$$

Queremos determinar o valor de:

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - \frac{11}{21} - \frac{5}{21} + \frac{1}{7} = \frac{21 - 11 - 5 + 3}{21} = \frac{8}{21} \end{aligned}$$

A probabilidade de o aluno escolhido ser uma rapariga e não frequentar o 10.º ano é $\frac{8}{21}$.

2.2.

A turma de 26 alunos tem 15 raparigas e 11 rapazes.

Como o delegado de turma, que é rapaz, tem que pertencer à comissão, vamos considerar 15 raparigas e 10 rapazes para constituir comissões mistas de dois elementos.

Assim, temos que considerar dois casos:

- Comissões constituídas por um rapaz e uma rapariga (e o delegado):

Neste caso temos $^{10}C_1 \times ^{15}C_1 = 10 \times 15 = 150$ comissões possíveis.

- Comissões constituídas duas raparigas:

Como o delegado pertence à comissão, esta continua a ser mista se escolhermos duas raparigas.

Neste caso temos $^{15}C_2 = 105$ comissões possíveis.

Desta forma, há $150 + 105 = 255$ comissões diferentes que se podem formar.

A resposta correta é a opção (D).

3.

3.1. P2001/2002

Retirando-se duas bolas da caixa ao acaso e em simultâneo, o número de bolas brancas retiradas poderá ser: duas, uma ou zero. Assim, a tabela de distribuição de probabilidade da variável aleatória X “número de bolas brancas retiradas” é:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{{}^3C_2}{{}^5C_2} = \frac{3}{10}$	$\frac{{}^3C_1 \times {}^2C_1}{{}^5C_2} = \frac{6}{10}$	$\frac{{}^2C_2}{{}^5C_2} = \frac{1}{10}$

Logo, o valor médio da variável aleatória X é:

$$\mu = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = 0,8$$

A resposta correta é a opção (B).

3.2. PMC2015

Sabendo que num triângulo ao maior ângulo se opõe o maior lado, o lado que se opõe ao ângulo α será o lado que mede 6.

Usando a Lei dos Cossenos temos:

$$6^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos \alpha \Leftrightarrow 36 = 25 + 16 - 40 \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 40 \cos \alpha = 41 - 36$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{5}{40} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{8}$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria vem:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \sin^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{64} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{63}{64} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{63}{64}}$$

Como α é um ângulo interno do triângulo temos que $\sin \alpha$ é positivo logo:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{63}{64}} \Leftrightarrow \sin \alpha \approx 0,992 \text{ (3 c.d.)}$$

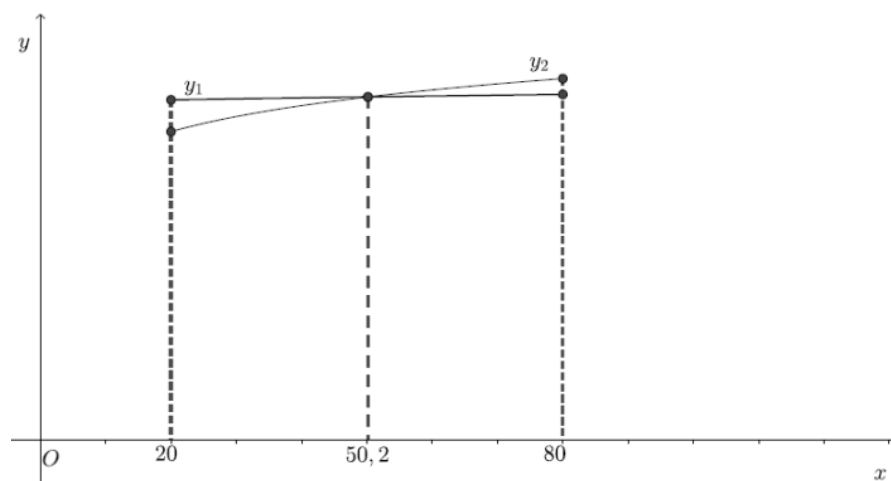
A resposta correta é a opção **(B)**.

4.

Sabe-se que aumentando a intensidade I em $150 \mu\text{W}/\text{m}^2$ o nível N , do som, passa a ser 1,4% do quadrado do nível inicial:

$$60 + 10 \log_{10}(I + 150) = 0,014 \times (60 + 10 \log_{10}(I))^2$$

Considerando as funções $y_1(x) = 60 + 10 \log_{10}(x + 150)$ e $y_2(x) = 0,014 \times (60 + 10 \log_{10}(x))^2$ e visualizando os gráficos na calculadora gráfica no domínio $[20, 80]$ procuramos o ponto de interseção dos dois que é a solução da equação apresentada.



O valor da intensidade inicial do som do despertador é aproximadamente igual a $50 \mu\text{W}/\text{m}^2$ (0 c.d.).

5.

Como se trata do quociente entre funções polinomiais, f é contínua em $]-\infty, 1]$ e em $]1, +\infty[$.

A função é contínua em $x = 1$ se e só se $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

Como $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$ e $f(1) = \log_3 k$, temos:

$$\log_3 k = 2 \Leftrightarrow k = 3^2 \Leftrightarrow k = 9.$$

A resposta correta é a opção (D).

6.

Como 2, a e b são três termos consecutivos de uma progressão geométrica temos que:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{2} \Leftrightarrow a^2 = 2b$$

Sabendo igualmente que $a - 2$, b e 2 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética, temos que:

$$b - (a - 2) = 2 - b \Leftrightarrow b - a + 2 = 2 - b \Leftrightarrow a = 2b$$

Logo,

$$\begin{cases} a^2 = 2b \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ b = \frac{a}{2} \end{cases} \quad (a, b \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim, $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$.

7.

Sejam B e C os afijos de z_B e z_C respetivamente. O ponto A é o afixo de z .

Temos que:

Como $[ABCD]$ é um quadrado, vem que $\widehat{ADC} = \frac{\pi}{2}$, pelo que $z_C = z \times i$.

Temos ainda que: $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.

Assim,

$$z_B = z_C + z = z \times i + z = z(i + 1)$$

$z(i + 1)$ é o número complexo cujo afixo é o ponto B .

A resposta correta é a opção (A).

8.

Dados $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = 1 - 2i$, vem que $\overline{z_2} = 1 + 2i$. Pretendemos provar que o afixo do número

complexo $w = \frac{3z_1 - iz_2}{1+i}$ pertence à circunferência definida por $|z - z_1| = \sqrt{53}$.

Assim,

$$w = \frac{3z_1 - iz_2}{1+i} = \frac{6 - 9i - i - 2i^2}{1-i} = \frac{6 - 10i + 2}{1-i} = \frac{8 - 10i}{1-i} = \frac{(8-10i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{18 - 2i}{2} = 9 - i.$$

Determinando a distância entre os afixos de w e de z_1 temos:

$$|w - z_1| = |(9 - i) - (2 - 3i)| = |7 + 2i| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53}$$

Como a distância entre os dois pontos é $\sqrt{53}$ então o afixo de w pertence à circunferência de centro z_1 e raio igual a $\sqrt{53}$, como queríamos mostrar.

9.1. P2001/2002

Vamos determinar o valor máximo que a função objetivo pode alcançar atribuindo os valores das coordenadas de cada um dos vértices do pentágono na expressão que define a referida função.

Calculando as coordenadas dos vértices:

$$y = 300 \Rightarrow x + 300 = 400 \Leftrightarrow x = 100$$

$$x = 150 \Rightarrow 150 + y = 400 \Leftrightarrow y = 250$$

x	y	$L = 2x + y$
0	0	0
150	0	$300 + 0 = 300$
150	250	$300 + 250 = 550$
100	300	$200 + 300 = 500$
0	300	$0 + 300 = 300$

O valor máximo que a função objetivo pode alcançar nesta região é 550.

A resposta correta é a opção (C).

9.2. PMC2015

Como

$$\sin\left(3\arccos\frac{1}{2}\right) = \sin\left(3 \times \frac{\pi}{3}\right) = \sin(\pi) = 0$$

A resposta correta é a opção (C).

10.

Sabe-se que a equação da reta AB é $y = 2x + 4$ e como a ordenada na origem é 4 então as coordenadas do ponto B são $(0, 4)$.

Como a ordenada do ponto A é 0 temos que:

$$0 = 2x + 4 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$$

Logo as coordenadas do ponto A são $(-2, 0)$.

Assim, as coordenadas do ponto M ponto médio do segmento de reta $[AB]$ são:

$$M = \left(\frac{0-2}{2}, \frac{4+0}{2} \right) = (-1, 2)$$

A resposta correta é a opção **(B)**.

11.

11.1. P2001/2002

A partir das equações cartesianas da reta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-0}{1}$, concluímos que $(2, -4, 1)$ é um vetor diretor de r .

Aplicando o produto escalar excluimos as opções (A), (B) e (D) uma vez que:

$$(2, 4, 1) \cdot (2, -4, 1) = 4 - 16 + 1 \neq 0$$

$$(-3, 1, 0) \cdot (2, -4, 1) = -6 - 4 \neq 0$$

$$(-4, 2, 0) \cdot (2, -4, 1) = 8 - 8 \neq 0$$

Como $(1, 1, 2) \cdot (2, -4, 1) = 2 - 4 + 2 = 0$, concluímos que o vetor procurado é $(1, 1, 2)$, pois o produto escalar deste pelo vetor diretor da reta é nulo.

A resposta correta é a opção **(C)**.

11.2. PMC2015

$$\lim \left(\frac{n + \ln a}{n} \right)^{n+2} = \lim \left(1 + \frac{\ln a}{n} \right)^n \times \lim \left(1 + \frac{\ln a}{n} \right)^2 = e^{\ln a} \times 1^2 = a \times 1 = a.$$

A resposta correta é a opção **(C)**.

12.

12.1.

Para estudar a existência das assintotas paralelas aos eixos coordenados, temos de estudar a existência de assintotas verticais e horizontais.

Assintotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{0^-} = -\infty$$

Logo, $x = 1$ é a equação da única assintota vertical do gráfico de h , uma vez que a função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Assintotas horizontais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{+\infty}{1-0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty-1} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

Logo, $y = 0$ é equação da única assintota horizontal do gráfico de h .

12.2.

$$\begin{aligned} (x-1) \times \frac{e^x}{x-1} + 2e^{-x} = 3 &\Leftrightarrow e^x + \frac{2}{e^x} = 3 \Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \vee e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = 0 \end{aligned}$$

$$C.S. = \{0, \ln 2\}$$

13.

13.1.

Para estudar a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, começemos por determinar as expressões da primeira derivada e da segunda derivada da função g :

$$g'(x) = -\frac{1}{2}\sin(2x) + \sin x$$

$$g''(x) = -\cos(2x) + \cos x$$

Calculando os zeros da segunda derivada:

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\Leftrightarrow -\cos(2x) + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 2x = -x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Em $]0, \pi[$, a única solução é $x = \frac{2}{3}\pi$.

Estudando a variação de sinal da segunda derivada e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g , temos:

	0		$\frac{2}{3}\pi$		π
$g''(x)$	n.d.	+	0	-	n.d.
g	n.d.	∪	P.I.	∩	n.d.

Cálculos auxiliares:

$$g\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) - \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Podemos então concluir que o gráfico de g tem:

- a concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{2}{3}\pi\right]$;
- a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{2}{3}\pi, \pi\right[$;
- um ponto de inflexão de coordenadas $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{8}\right)$.

13.2.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(-x) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{4} \cos(-2x) - \cos(-x) + \frac{1}{4} \cos(\pi - 2x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \\ &= \frac{1}{4} \cos(2x) - \cos x + \frac{1}{4} \cos(2x) - \sin x = -\sin x - \cos x \end{aligned}$$

A resposta correta é a opção (B).

14.

Seja a a abcissa do ponto P ($a > 0$), logo P tem de coordenadas (a, a^2) .

Como $f'(x) = 2x$, temos que o declive da reta r é dado por $2a$ e sendo assim o declive da reta s é dado por $-\frac{1}{2a}$.

Seja c a abcissa do ponto Q ($c < 0$), logo temos que $f'(c) = -\frac{1}{2a}$, isto é, $2c = -\frac{1}{2a}$, e portanto

$$ac = -\frac{1}{4}.$$

Como a equação reduzida da reta r é dada por $y = 2ax + b$ substituindo as coordenadas do ponto P , temos que:

$$a^2 = 2a \cdot a + b \Leftrightarrow b = -a^2$$

E, sendo assim, a equação reduzida da reta r é dada por $y = 2ax - a^2$.

Efetuando um raciocínio em tudo semelhante para a reta s obtém-se como equação reduzida para a reta s a expressão $y = 2cx - c^2$.

Como I é o ponto de intersecção entre as duas retas r e s então temos:

$$\begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ y = 2cx - c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + a^2 = 2ax \\ y + c^2 = 2cx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y + a^2}{2a} = x \\ \frac{y + c^2}{2c} = x \end{cases} \quad \begin{matrix} a > 0 \Rightarrow a \neq 0 \\ c < 0 \Rightarrow c \neq 0 \end{matrix}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{y + a^2}{2a} &= \frac{y + c^2}{2c} \Leftrightarrow yc + ca^2 = ya + ac^2 \Leftrightarrow yc - ya = ac^2 - ca^2 \Leftrightarrow y(c - a) = ac(c - a) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = ac \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4} \end{aligned} \quad \begin{matrix} a > 0 \wedge c < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow c - a < 0 \Rightarrow c - a \neq 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} ac = -\frac{1}{4} \end{matrix}$$

Assim, a ordenada do ponto I é sempre igual a $-\frac{1}{4}$.

FIM