Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 635) – 1.ª FASE – 15 DE JULHO 2020

1.

1.1.

Para estudarmos a monotonia da sucessão (u_n) estudemos o sinal de $u_{n+1}-u_n$. Assim, tem-se que:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{8(n+1)-4}{n+1+1}-\frac{8n-4}{n+1}=\frac{8n+4}{n+2}-\frac{8n-4}{n+1}=\frac{(8n+4)(n+1)-(8n-4)(n+2)}{(n+2)(n+1)}=$$

$$=\frac{\cancel{8n^2}+8n+4n+4-\cancel{8n^2}-16n+4n+8}{(n+2)(n+1)}=\frac{\cancel{12n}-\cancel{12n}+12}{(n+2)(n+1)}=\frac{12}{(n+2)(n+1)}$$

Como para todo o n natural, $(n+2)(n+1)>0$ e como $12>0$, vem que $\frac{12}{(n+2)(n+1)}>0$, ou seja, $u_{n+1}-u_n>0$, para todo o n natural, e portanto conclui-se que a sucessão (u_n) é monótona crescente.

1.2.

Como $\lim(u_n)=\lim\frac{8n-4}{n+1}=\lim\frac{8\cancel{n}}{\cancel{n}}=8$ e (u_n) é monótona crescente, vem que: $u_n\to 8^-$.

Logo, $\lim f(u_n)=\lim\limits_{x\to 8^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 8^-}\log_2(8-8^-)=\log_2(0^+)=-\infty$

Outra resolução:

$$\lim f(u_n)=\lim\log_2(8-u_n)\underset{\substack{y=\log_2 x\\ \text{é contínua}}}{=}\log_2(\lim(8-u_n))=\log_2\left(\lim\left(8-\frac{8n-4}{n+1}\right)\right)=$$

$$=\log_2\left(\lim\frac{\cancel{8n}+8-\cancel{8n}+4}{n+1}\right)=\log_2\left(\lim\frac{12}{n+1}\right)=\log_2\left(\frac{12}{+\infty}\right)=\log_2(0^+)=-\infty$$

A resposta correta é a opção: **(A)**

2.

Casos possíveis:

Cada uma das 4 pessoas pode escolher qualquer um dos cinco números, ou seja 5^4.

Casos favoráveis:

Das 4 pessoas, duas escolhem o número 5, isto é: ${}^4C_2$.

As restantes duas pessoas, escolhem qualquer um dos números 1, 2, 3 ou 4, ou seja 4^2.

$$P = \frac{{}^4C_2 \times 4^2}{5^4} \approx 0{,}1536$$

A resposta correta é a opção: **(D)**

3.

3.1.

Seja,
a – número de bolas azuis
b – número de bolas brancas
$a + b$ – número total de bolas

Sabe-se que:

$$P\left(A \cap B\right) = \frac{1}{3}P\left(A\right)$$

Assim, temos:

$$P\left(A \cap B\right) = \frac{1}{3}P\left(A\right) \Leftrightarrow P\left(A\right) \times P\left(B \middle| A\right) = \frac{1}{3} \times P\left(A\right) \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b-1} = \frac{1}{3} \times \frac{a}{a+b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a+b-1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3b = a + b - 1 \Leftrightarrow a = 2b + 1$$

Como para todo o número b pertencente aos números naturais temos que $2b + 1$ é um número ímpar então fica provado que inicialmente existia um número ímpar de bolas azuis.

3.2.

Cada caixa numerada com um número par tem que ter pelo menos uma bola azul. Sendo cinco o número de caixas com o número par, das 8 bolas azuis iniciais, depois de se colocarem uma em cada caixa, sobram apenas 3 bolas azuis.

Seguindo o mesmo raciocínio, cada caixa numerada com um número ímpar tem que ter pelo menos uma bola branca. Sendo cinco o número de caixas com o número ímpar, das 7 bolas brancas iniciais, depois de se colocarem uma em cada caixa, sobram apenas 2 bolas brancas.

Como a caixa tem no máximo duas bolas. Das 5 bolas que restam, 3 azuis e 2 brancas, estas serão distribuídas pelas 10 caixas, cada uma em sua caixa distinta. Assim sendo, temos:

$${}^{10}C_3 \times {}^7C_2 = 2520$$

A resposta correta e a opção (**B**).

4.

4.1.

Considerando o número complexo $z = re^{iq}$, temos que $\overline{z} = re^{i\left(-q\right)}$ logo:

$$z^2 = \overline{z} \Leftrightarrow \left(re^{iq}\right)^2 = re^{i\left(-q\right)} \Leftrightarrow r^2 e^{i\left(2q\right)} = re^{i\left(-q\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^2 = r \wedge 2q = -q + 2kp,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^2 - r = 0 \wedge 3q = 2kp,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r\left(r - 1\right) = 0 \wedge q = \frac{2kp}{3},\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(r = 0 \vee r = 1\right) \wedge q = \frac{2kp}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

Considerando somente os números complexos não nulos, teremos as seguintes soluções da equação:

Para:

$$k = 0,\ z_0 = e^{i\left(0\right)} = 1$$

$$k = 1,\ z_1 = e^{i\left(\frac{2p}{3}\right)} = \cos\left(\frac{2p}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2p}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2,\ z_2 = e^{i\left(\frac{4p}{3}\right)} = \cos\left(\frac{4p}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4p}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

As imagens geométricas destas soluções são os vértices de um triângulo equilátero centrado na origem, pelo que para determinarmos o perímetro desse triângulo, basta determinarmos o comprimento de um dos seus lados. Assim,

$$\left|z_0 - z_1\right| = \left|1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \left|\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

Logo o perímetro do polígono pedido será $P = 3\sqrt{3}$.

4.2.

Temos que:

$$\mathrm{Re}\left(z\right) \times \mathrm{Im}\left(z\right) = 1 \Leftrightarrow x \times y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$$

Logo o conjunto de pontos definido por esta condição é representado por uma hipérbole em que os seus pontos têm a abcissa e a ordenada com o mesmo sinal, pertencendo por isso ao primeiro e ao terceiro quadrante.

A resposta correta é a opção (**D**).

5.

5.1.

Consideremos os pontos A e B de coordenadas, respetivamente, $(0,y,0)$ e $(x,0,0)$ e o volume do cilindro como $V_C = \pi \times r^2 \times h$, sendo $r = \overline{BC}$ e $h = \overline{AB}$.

Determinemos as coordenadas de A e de B a partir da equação do plano ABC:

$A \rightarrow 3\times 0 + 4y + z\times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow 4y = 12 \Leftrightarrow y = \frac{12}{4} \Leftrightarrow y = 3$. Assim, $A(0,3,0)$;

$B \rightarrow 3x + 4\times 0 + z\times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x = 4$. Então, $B(4,0,0)$.

Podemos determinar a altura do cilindro, como sendo a distância entre os pontos A e B: $h = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

Sabendo que o volume do cilindro é igual a 10π então:

$10\pi = \pi r^2 \times 5 \Leftrightarrow r^2 = 2 \Leftrightarrow r = \sqrt{2}, (r > 0)$.

Assim, vem que $\overline{BC} = \sqrt{2}$.

5.2.

Temos que o vetor $(3,4,4)$ é normal ao plano *ABC*. Assim, a reta definida por $(x,y,z) = (3,5,6) + k(3,4,4), k \in \mathbb{R}$, é uma reta perpendicular ao plano *ABC* e que passa pelo ponto *P*.

O ponto de interseção desta reta com o plano é o ponto, do plano, que está mais próximo de *P*.

Assim,

$(x,y,z) = (3k+3, 4k+5, 4k+6), k \in \mathbb{R}$, substituindo na equação do plano, temos:

$$3(3k+3) + 4(4k+5) + 4(4k+6) - 12 = 0 \Leftrightarrow 9k + 9 + 16k + 20 + 16k + 24 - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41k = -41 \Leftrightarrow k = -1$$

Deste modo, as coordenadas do ponto pedido são:

$(x,y,z) = (3\times(-1)+3, 4\times(-1)+5, 4\times(-1)+6) = (0,1,2)$.

6.

A amplitude do ângulo STU, em radianos, é igual a $\pi - \alpha$, em que α é a inclinação da reta r.

Como o declive da reta r é igual a 2, vem que $\operatorname{tg}\alpha = 2$ e portanto $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}(2)$.

Logo, a amplitude, em radianos, do ângulo STU é $\pi - \operatorname{tg}^{-1}(2) \approx 2{,}03$.

A resposta correta é a opção: **(C)**

7.

7.1.

Determinamos o comprimento da biela, calculando $d(0)$ e subtraindo o comprimento da manivela (1cm). Assim, $d(0)=\cos(0)+\sqrt{9+\sin^2(0)}=1+\sqrt{9}=4$.

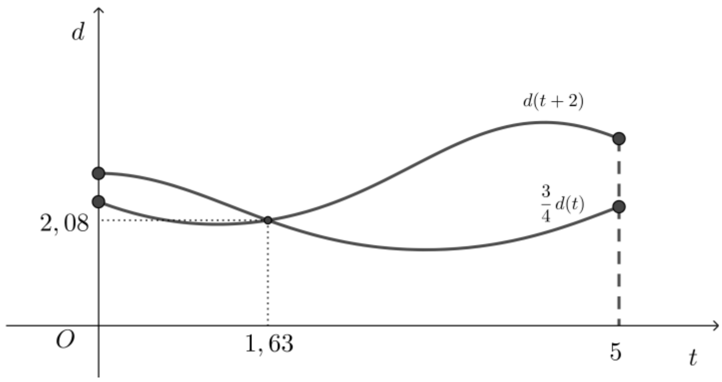
Temos então que $4-1=3$.

A resposta correta é a opção: (**B**)

7.2.

Consideremos o domínio $t\in[0,5]$.

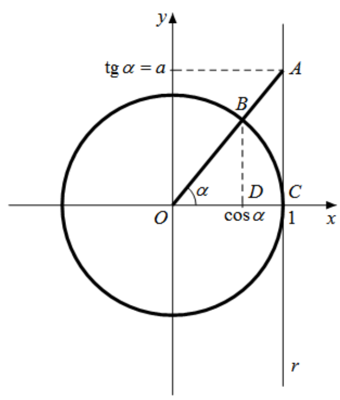
Uma equação que traduz o problema é $d(t_0+2)=\frac{3}{4}d(t_0)$, (se a distância diminuiu 25%, então passou a ser 75%, ou seja, $\frac{3}{4}$ do que era).



Do gráfico concluímos que $t_0=1{,}63$. A distância, em centímetros, arredondada às décimas, do pistão ao ponto *O*, no instante t_0 é $d(1{,}63)\approx 2{,}8$.

8.

Consideremos a figura ao lado em que $C(1,0)$, D é o ponto do eixo Ox tal que $[ODB]$ é retângulo em D e α é a amplitude do ângulo COA, com $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.



Desta forma, a ordenada do ponto A é dada por $\operatorname{tg}\alpha$, pelo que $\operatorname{tg}\alpha=a$ e a abcissa de B é dada por $\cos\alpha$. Assim, como $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, vem que:

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow 1+a^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{1}{a^2+1}\underset{\cos\alpha>0}{\Leftrightarrow}\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{a^2+1}}\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

A resposta correta é a opção: **(A)**

9.

9.1.

Seja $y = mx + b$ a equação reduzida da reta assíntota oblíqua ao gráfico de f.

Calculemos m e b:

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x + \ln\left(e^x + 1\right)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln\left(e^x + 1\right)}{x} = 1 + \frac{\ln(0+1)}{-\infty} = 1 + 0 = 1$$

$$b = \lim_{x\to -\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim_{x\to -\infty} \left(x + \ln\left(e^x + 1\right) - x\right) = \lim_{x\to -\infty} \ln\left(e^x + 1\right) = \ln(0+1) = 0$$

Assim, uma equação da reta pretendida é $y = x$.

9.2.

Seja $x \in \left]-\infty, 2\right]$. Tem-se que:

$$f(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow x + \ln\left(e^x + 1\right) = 2x + 1 \Leftrightarrow \ln\left(e^x + 1\right) = x + 1 \Leftrightarrow e^{x+1} = e^x + 1 \Leftrightarrow e \times e^x = e^x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e \times e^x - e^x = 1 \Leftrightarrow e^x(e-1) = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{e-1}\right) \Leftrightarrow x = \ln(e-1)^{-1} \Leftrightarrow x = -\ln(e-1)$$

Como $-\ln(e-1) \in \left]-\infty, 2\right]$, tem-se que a solução é dada, na forma pretendida, por $-\ln(e-1)$.

9.3.

Uma vez que, $h(x) = f(x) - x \Leftrightarrow h(x) = \ln\left(e^x + 1\right)$, então

$$h(x) = y \Leftrightarrow \ln\left(e^x + 1\right) = y \Leftrightarrow e^y = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = e^y - 1 \Leftrightarrow x = \ln\left(e^y - 1\right).$$

Conclui-se que $h^{-1}(x) = \ln\left(e^x - 1\right)$.

A resposta correta é a opção: **(C)**

10.

10.1.

Para averiguar se a função g é contínua em $x=0$, temos que verificar se $g(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$:

- $g(0)=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1+\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-e^x}\right)=1+\dfrac{\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-e^x}{x}}=1+\dfrac{\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}{-\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-1}{x}}_{\text{limite notável}}}=1+\dfrac{1}{-1}=1-1=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x\right)=0\times\infty$ (indeterminação)

(fazendo $y=\dfrac{1}{x}$, temos que se $x\to 0^+$, então $y\to+\infty$ e $x=\dfrac{1}{y}$)

$$\lim_{y\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{y}\right)^2\ln\left(\frac{1}{y}\right)\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(y^{-1}\right)}{y^2}\right)=-\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\ln y}{y}\right)\times\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}\right)=-0\times 0=0$$

Como $g(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=0$, então a função é contínua em $x=0$.

10.2.

Comecemos por determinar a expressão analítica da derivada da função g:

$$g'(x)=\left(x^2\ln x\right)'=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$$

Calculando os zeros da função derivada, no domínio da função vem:

$$g'(x)=0\Leftrightarrow x(2\ln x+1)=0\Leftrightarrow x=0\vee 2\ln x+1=0\Leftrightarrow x=0\vee \ln x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=0\vee x=e^{-\frac{1}{2}}$$

Estudando a variação do sinal da função derivada, em $]0,+\infty[$, e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		↘	Min	↗

Assim, podemos concluir que o valor mínimo da função g é atingido quando $x=e^{-\frac{1}{2}}$, ou seja,

$$g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=e^{-1}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2e}.$$

A função é monótona decrescente em $\left]0,e^{-\frac{1}{2}}\right]$, monótona crescente em $\left[e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right[$ e tem um mínimo igual a $-\dfrac{1}{2e}$.

FIM