Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 635) – 1ª FASE – 30 DE JUNHO 2025

1.

Calculemos o limite:

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3} = \left(\underbrace{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{\text{Limite notável}}\right)^{3} = e^{3}$$

Resposta correta: (C)

2.

2.1.

A função g é contínua em $x=0$ se e só se $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = g(0)$.

Calculemos cada um dos limites laterais, bem como a imagem da função em $x=0$.

Ora,

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(2\text{sen}^2 x - \sqrt{3}x + 2\right) = \text{sen}^2(0) - 0 + 2 = 2.$$

Por sua vez,

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\text{sen}\, x}{1-\sqrt{1-x}}\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\text{sen}\, x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{\left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\text{sen}\, x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{1-(1-x)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\text{sen}\, x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\text{sen}\, x}{x}\times\left(1+\sqrt{1-x}\right)\right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\text{sen}\, x}{x}\right)}_{\text{Limite notável}} \times \lim_{x\to 0^-}\left(1+\sqrt{1-x}\right) = 1\times\left(1+\sqrt{1-0}\right) = 1\times 2 = 2$$

Finalmente, $g(0) = 2\,\text{sen}^2(0) - 0 + 2 = 2$.

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = g(0)$, concluímos que a função g é contínua em $x=0$

2.2.

A função g em $]0,\pi]$ é definida pela expressão $g(x) = 2\,\text{sen}^2(x) - \sqrt{3}x + 2$.

Para estudar a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos em $]0,\pi]$, determinemos a expressão analítica da primeira derivada da função g:

$$g'(x) = 2 \times 2sen(x) \times \left(sen(x)\right)' - \sqrt{3} = 4sen(x)cos(x) - \sqrt{3} = 2sen(2x) - \sqrt{3}$$

Procuremos os zeros da derivada:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2sen(2x) - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2\sin(2x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \; 2x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \;\; \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee \; x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in]0,\pi]$, então $x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{3}$.

Recorrendo à circunferência trigonométrica podemos construir a tabela:

	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		π
Sinal de $g'(x)$	n. d.	$-$	0	$+$	0	$-$	$-\sqrt{3}$
Variação de g	n. d.	↘	$g\left(\frac{\pi}{6}\right)$	↗	$g\left(\frac{\pi}{3}\right)$	↘	$g(\pi)$

Concluímos, pela análise da tabela que:

a função g é decrescente $\left]0,\frac{\pi}{6}\right]$ e em $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$; crescente em $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ e que as abcissas dos extremos relativos da função são: $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$ e π.

3.

Numa linha do triângulo de Pascal o segundo elemento e o penúltimo elemento de qualquer linha são iguais. Assim, o produto do segundo elemento pelo penúltimo é igual ao segundo elemento elevado ao quadrado, que neste caso é igual a 625.

Logo o segundo elemento é igual à raiz quadrada de 625, ou seja 25.

O segundo elemento de uma linha do triângulo de Pascal é igual ao número da linha, pelo que a linha anterior a esta, referida na questão, é a linha 24.

Como todas a linhas começam no elemento de ordem zero, o quinto elemento dessa linha é: ${}^{24}C_4 = 10626$

Resposta correta: (A)

4.

Designemos por B o acontecimento "o aluno está inscrito em ballet clássico" e por D o acontecimento "o aluno está inscrito em dança contemporânea".

Com o enunciado sabemos que ao escolher um aluno da academia ao acaso $P(B) = 0{,}6$.

Sabe-se também que $P(D \cap \overline{B}) = 0{,}25$.

Sabe-se ainda que metade dos inscritos em dança contemporânea também estão inscritos em ballet clássico. Ou seja, de todos os alunos inscritos em dança contemporânea metade está escrito em ballet e a outra metade não está inscrito em ballet. Assim, $P(D \cap B) = P(D \cap \bar{B}) = 0{,}25$.

Logo,

$P(D) = P(D \cap \bar{B}) + P(D \cap B) = 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$ e assim temos $P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 0{,}5$

Temos ainda que:

$$P(B \cap \bar{D}) = P(B) - P(B \cap D) = 0{,}6 - 0{,}25 = 0{,}35$$

Pretende-se determinar a probabilidade de um aluno estar inscrito em ballet clássico, sabendo que não está inscrito em dança contemporânea, ou seja:

$$P(B|\bar{D}) = \frac{P(B \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{0{,}35}{0{,}5} = 0{,}7$$

5.

Atendendo a que o número de dados apresentados na tabela relativamente à variável diâmetro biparietal é par (8 observações e apresentadas por ordem crescente), a mediana resulta na média das duas observações centrais. Assim temos:

$$\tilde{x} = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{8{,}30 + 8{,}66}{2} = 8{,}48$$

Determinemos a média dos 8 dados referentes ao diâmetro biparietal:

$$\bar{x} = \frac{7{,}49 + 7{,}81 + 8{,}21 + 8{,}30 + 8{,}66 + 8{,}76 + 9{,}04 + 9{,}24}{8} = 8{,}43875$$

Calculemos a diferença existente entre as duas medidas de localização:

$$\tilde{x} - \bar{x} = 8{,}48 - 8{,}43875 \approx 0{,}04$$

Sendo a amplitude da amostra a diferença entre observação máxima e mínima, calculemos a amplitude da amostra dos perímetros cefálicos apresentados:

$$x_{max} - x_{min} = 37{,}63 - 30{,}36 = 7{,}27$$

Admitindo a validade do modelo de regressão linear relativamente às variáveis diâmetro biparietal (x) e Perímetro cefálico (y), usemos a calculadora para obtermos a equação da reta de regressão linear (com os parâmetros arredondados às milésimas) e o coeficiente de correlação linear (arredondado às centésimas). Comecemos por introduzir na calculadora gráfica as listas com os dados apresentados no enunciado:

Diâmetro biparietal (x)	Perímetro cefálico (y)
7,49	30,36
7,81	31,99
8,21	33,66
8,30	35,26
8,66	35,51
8,76	34,86
9,04	35,30
9,24	37,63

Conseguimos obter a equação da reta de regressão com os parâmetros a e b arredondados às milésimas, que é: $y = 3{,}536x + 4{,}480$

Sendo o coeficiente de regressão linear, arredondado às centésimas: $r \approx 0{,}94$

Com base na equação da reta de regressão linear obtida anteriormente, façamos uma estimativa para o perímetro cefálico de um recém-nascido desta maternidade cujo diâmetro biparietal na trigésima quarta semana de gravidez tenha sido 8,50 cm.

Desta forma, deve-se substituir o valor de x por 8,50 e determinar o valor de y, aproximando-o às centésimas. Assim, temos:

$$y = 3{,}536 \times 8{,}50 + 4{,}480 \Leftrightarrow y \approx 34{,}54$$

Assim, como resposta ao item, as correspondências corretas são:

I	II	III	IV
a)	**c)**	**b)**	**a)**

6.

O número de casos possíveis corresponde ao total de códigos multibanco existentes sem qualquer tipo de restrições, ou seja, ${}^{10}A'_4 = 10^4$.

Relativamente aos casos favoráveis, atendendo a que a soma dos quatro algarismos tem de ser um número ímpar, teremos duas situações distintas, ou os códigos apresentam um único algarismo ímpar ou apresentam três algarismos ímpares distintos. Assim sendo, temos:

Número de códigos multibanco de quatro algarismos diferentes, sendo um desses o algarismo zero e com apenas um algarismo ímpar:

$${}^{1}C_1 \times {}^{4}C_2 \times {}^{5}C_1 \times 4! = 720$$

Número de códigos multibanco de quatro algarismos diferentes, sendo um desses o algarismo zero e com três algarismos ímpares:

$${}^{1}C_1 \times {}^{5}C_3 \times 4! = 240$$

Recorrendo à Regra de Laplace, determinamos a probabilidade de o código atribuído a um cartão multibanco ter todos os algarismos diferentes, um dos algarismos ser o zero e a soma dos quatros algarismos ser um número ímpar, e apresentamos o resultado na forma de fração irredutível:

$$\frac{720 + 240}{10^4} = \frac{960}{10000} = \frac{12}{125}$$

7.

1.º processo

Uma vez que a circunferência é definida pela equação $(x+1)^2+(y-1)^2=4$ o seu raio é 2 e, portanto, $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = 2$.

Seja M o ponto médio de $[AB]$. Então,

$$\cos\alpha = \frac{\|\overrightarrow{AM}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\|\overrightarrow{AM}\|}{2} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM}\| = 2\cos\alpha$$

e

$$\|\overrightarrow{AB}\| = 2 \times \|\overrightarrow{AM}\| = 4\cos\alpha.$$

pelo que:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\alpha = 6 \Leftrightarrow 4\cos\alpha \times 2 \times \cos\alpha = 6 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{6}{8} \Leftrightarrow cos^2\,\alpha = \frac{3}{4}$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, vem que: $\cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Logo $A\hat{C}B = \pi - 2\alpha = \pi - 2\times\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$.

Assim, o comprimento do arco AB é $\frac{2\pi}{3}\times 2 = \frac{4\pi}{3}$.

2.º processo

Uma vez que a circunferência é definida pela equação $(x+1)^2+(y-1)^2=4$ o seu raio é 2 e, portanto, $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = 2$.

Tem-se que:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)\cdot\overrightarrow{AC} = 6 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$

$$\Leftrightarrow 2^2 - \|\overrightarrow{CB}\| \times \|\overrightarrow{CA}\| \times \cos\left(A\hat{C}B\right) = 6 \Leftrightarrow -2\times 2\times\cos\left(A\hat{C}B\right) = 2 \Leftrightarrow \cos\left(A\hat{C}B\right) = -\frac{1}{2}$$

Como $A\hat{C}B \in \left]0,\pi\right[$, então $A\hat{C}B = \frac{2\pi}{3}$.

Logo, o comprimento do arco AB é $\frac{2\pi}{3}\times 2 = \frac{4\pi}{3}$.

8.

Como $Im(w) = Re(w)$, logo $w = \rho e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Então, $iw^3 = e^{i\frac{\pi}{2}} \times \left(\rho e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3 = e^{i\frac{\pi}{2}} \times \rho^3 e^{i\frac{3\pi}{4}} = \rho^3 e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \rho^3 e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

O ponto que pode ser o afixo do número complexo iw^3 é o ponto C.

Resposta correta: (C)

9.

Comecemos por escrever os três números complexos z_1, z_2 e w na forma $a+bi$:

$z_1 = 2\,i^{19} = 2\,i^3 = 2\,i^2 \times i = -2\,i$

$P_1(0,-2)$

$z_2 = \frac{-3+i}{1+i} = \frac{(-3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-3+3\,i+i-i^2}{1+1} = \frac{-3+1+4\,i}{2} = \frac{-2+4\,i}{2} = -1+2\,i$

$P_2(-1,2)$

$k = ?$

$w = -\sqrt{2}\,k\,e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{2}\,k\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,sen\,\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\,k\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right) = k - k\,i$

$P_w(k,-k)$

Como o afixo de w é equidistante do afixo de z_1 e do afixo de z_2, temos:

$$|w - z_1| = |w - z_2| \Leftrightarrow \sqrt{(k-0)^2 + (-k+2)^2} = \sqrt{(k+1)^2 + (-k-2)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 + k^2 - 4k + 4 = k^2 + 2k + 1 + k^2 + 4k + 4$$

$$\Leftrightarrow -4k - 2k - 4k = 1 \Leftrightarrow -10k = 1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{10}$$

10.

10.1.

O vetor diretor da reta que é perpendicular ao vetor diretor da reta DF é (0, 5, 1).

$(1,1,-5)\cdot(0,5,1) = 0+5-5 = 0$

Para averiguarmos, entre as opções B) e D), qual a reta que passa pelo ponto A, calculemos o valor de k:

$$(4,2,0) = (4,-3,-1) + (0,5k,k) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 4 \\ 2 = -3+5k \Leftrightarrow k = 1 \\ 0 = -1+k \end{cases}$$

Resposta correta: (B)

10.2.

Determinemos o plano mediador de $[AB]$

O vetor $\overrightarrow{AB} = B - A$ tem coordenadas $(2,3,-3) - (4,2,0) = (-2,1,-3)$.

Ponto Médio de $[AB] = \left(\frac{2+4}{2},\ \frac{3+2}{2}, \frac{-3+0}{2}\right) = \left(3,\ \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

O plano mediador é do tipo $-2x + y - 3z + d = 0$.

Determinemos o valor do termo independente d:

$-2 \times 3 + \frac{5}{2} - 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$

Logo o plano mediador é definido pela seguinte equação:

$-2x + y - 3z - 1 = 0$

Como a reta BC é paralela à reta DF, o vetor diretor de DF também é um vetor diretor da reta BC, cujas coordenadas são $(1, 1, -5)$.

$BC: (x, y, z) = (2, 3, -3) + k\ (1, 1, -5), k\epsilon\mathbb{R}$

Assim, as coordenadas de um ponto genérico da reta BC são da forma:

$(2 + k, 3 + k, -3 - 5k), k\epsilon\mathbb{R}$

Substituindo na equação do plano mediador de $[AB]$, temos:

$-2(2 + k) + 3 + k - 3(-3 - 5k) - 1 = 0 \Leftrightarrow -4 - 2k + 3 + k + 9 + 15k - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 14k = -7 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

Substituindo o valor de k na expressão, obtemos as coordenadas do ponto C:

$$\left(2 - \frac{1}{2}, 3 - \frac{1}{2}, -3 - 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

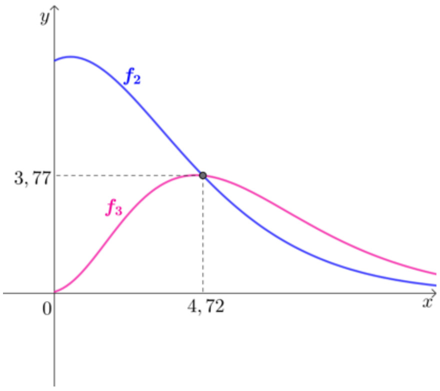
11.

O número de gafanhotos do enxame x semanas após as zero horas do dia em que foi localizado é dado por $G(x)$, e passadas mais quatro semanas é dado por $G(x + 4)$.

Como o número de gafanhotos ficou reduzido a metade entre o instante x e o instante $x + 4$, conclui-se que $G(x + 4) = \frac{1}{2}\ G(x)$.

Assim, recorrendo à calculadora gráfica e considerando $f_1(x) = G(x)$, $f_2(x) = f_1(x+4)$ e $f_3(x) = \frac{1}{2} f_1(x)$, determinemos as coordenadas do ponto de interseção dos gráficos das funções f_2 e f_3 .

De onde obtemos a seguinte representação gráfica:



De onde se verifica que o instante x pedido é, aproximadamente, 4,72 semanas, ou seja 4,72×7, que corresponde, aproximadamente, a 33 dias.

12.
12.1.
Determinação das coordenadas do ponto A:

$f(x)=5 \Leftrightarrow 3e^x-2e^{-x}=5 \Leftrightarrow 3e^x-\dfrac{2}{e^x}=5 \underset{(e^x>0)}{\Longleftrightarrow} 3(e^x)^2-5e^x-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\times3\times(-2)}}{2\times3} \Leftrightarrow e^x=2 \vee \underbrace{e^x=-\frac{1}{3}}_{impossível} \Leftrightarrow x=\ln 2$ logo $A(\ln 2\,,5)$.

Coordenadas do ponto B: $f(0)=3e^0-2e^0=1$, logo $B(0,1)$

Coordenadas do ponto C: $C(\ln 2\,,0)$

$$A_{[OCAB]}=\frac{\overline{OB}+\overline{AC}}{2}\times\overline{OC}=\frac{1+5}{2}\times\ln 2=3\ln 2=\ln 2^3=\ln 8$$

A área do trapézio $[OCAB]$ é $\ln 8$.

12.2.

Se o gráfico da função f interseta a reta de equação $y=3x+4$, temos que:

$f(x)=3x+4 \ \Leftrightarrow\ 3e^x-2e^{-x}=3x+4 \ \Leftrightarrow\ 3e^x-2e^{-x}-3x-4=0$

Consideremos a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$g(x)=3e^x-2e^{-x}-3x-4$

1) g é contínua em $[0,1]\subset\mathbb{R}$, pois resulta de operações elementares entre funções contínuas.

2) Calculando:

$g(0)=3e^0-2e^0-3\times0-4=-3$

$g(1)=3e^1-2e^{-1}-3\times1-4=3e-\frac{2}{e}-7\approx 0{,}42.$

3) Por 2), tem-se que $g(0)<0<g(1)$.

4) Por 1) e 3), aplicando o teorema de Bolzano-Cauchy, tem-se que existe pelo menos um valor em $]0,1[$, tal que a sua imagem por meio de g é 0, isto é, o gráfico da função f interseta a reta de equação $y=3x+4$ em, pelo menos, um ponto de abcissa pertencente a $]0,1[$.

13.

$D_f=\mathbb{R}$ e $D_{f'}=\mathbb{R}\backslash\{1\}$;

A função f é crescente em $]-\infty,1[$ e em $]1,+\infty[$

A reta de equação $x=1$ é assíntota ao gráfico da função f .

I. A função f é contínua em $x=1$

Justificação da falsidade da proposição I

Como a reta de equação $x=1$ é assíntota vertical ao gráfico da função f e o seu domínio é $\mathbb{R}$, um dos limites laterais quando x tende para 1 é infinito e 1 , logo nunca poderá ser igual a $f(1)$, e, como tal, f não é contínua em $x=1$.

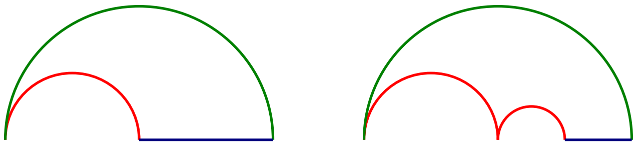
II. A reta de equação $y=-x+2$ é tangente ao gráfico da função f num ponto de abcissa diferente de 1 .

Justificação da falsidade da proposição II

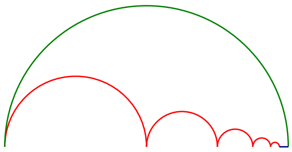
Como a função f é diferenciável em $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ e crescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$, a sua derivada em qualquer ponto pertencente a $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ é maior ou igual a zero. Sendo o declive de qualquer reta tangente ao gráfico de uma função num ponto, igual à derivada da função na abcissa desse ponto, conclui-se que a reta de equação $y = -x + 2$ não pode ser tangente ao gráfico da função f num ponto de abcissa diferente de 1 por ter declive negativo.

14.

Consideremos as figuras seguintes:



...



...

Tem-se que:

- em todas as figuras, o arco a verde tem o mesmo comprimento, $\frac{2\pi \times 1}{2} = \pi$;
- sendo u_n a expressão que dá comprimento do n-ésimo segmento de reta a azul, a sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, dado que cada segmento, à exceção do primeiro, tem metade do comprimento do anterior. Como $u_1 = 1$, vem que $u_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Logo, o comprimento do vigésimo segmento de reta azul é $\left(\frac{1}{2}\right)^{20-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$;
- o comprimento de cada arco a vermelho é também uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, dado que, à excepção do primeiro arco, o raio de cada arco é metade do raio do arco anterior, e, consequentemente, o comprimento de cada arco é metade do comprimento do arco anterior. A n-ésima figura tem n arcos vermelhos, pelo que o comprimento dos arcos vermelhos da n-ésima figura é a soma do comprimento desse n arcos.

Como o comprimento do primeiro arco vermelho é dado por $\frac{2\pi \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{\pi}{2}$, a soma dos comprimentos dos vinte primeiros arcos (a 20.ª composição tem vinte arcos vermelhos) é dada por:

$$\frac{\pi}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{\frac{1}{2}} = \pi\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right)$$

Logo, o perímetro da 20.ª composição é $\pi + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} + \pi\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right) \approx 6,28$.

15.

Como o gráfico de f e a reta r se intersetam no ponto de abcissa 0, então o ponto de coordenadas $\left(0, f\left(0\right)\right)$ pertence à reta r, ou seja $f\left(0\right)$ é a ordenada na origem da reta r.

Dado que $f\left(0\right) = a \times 0^3 + b \times 0 + c = c$, a equação reduzida de r é da forma $y = mx + c$, com $m, c \in \sim$.
Assim, igualando a expressão analítica de f e $mx + c$, tem-se:

$$f\left(x\right) = mx + c \Leftrightarrow ax^3 + bx + \cancel{c} = mx + \cancel{c} \Leftrightarrow ax^3 + bx - mx = 0 \Leftrightarrow x\left(ax^2 + b - m\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ ax^2 + b - m = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ ax^2 = m - b$$

$$\underset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} x = 0 \ \vee \ x^2 = \frac{m-b}{a}$$

Se o gráfico de f e a reta r se intersectarem em outros dois pontos distintos, então a equação $x^2 = \frac{m-b}{a}$ tem duas soluções (neste caso, tem-se necessariamente $\frac{m-b}{a} > 0$, dado que se $\frac{m-b}{a} \leq 0$, a equação seria impossível e o gráfico de f e a reta r só se intersectariam no ponto de abcissa 0).

Assim, $x^2 = \frac{m-b}{a} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{m-b}{a}} \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{m-b}{a}} \ \vee \ x = \sqrt{\frac{m-b}{a}}$, pelo que o gráfico de f e a reta r, além do ponto de abcissa 0, intersetam-se nos pontos de abcissas $-\sqrt{\frac{m-b}{a}}$ e $\sqrt{\frac{m-b}{a}}$, que são simétricas.

FIM