Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 635) – 2.ª FASE – 22 DE JULHO DE 2025

1.

Pede-se para determinar o limite da sucessão de termo geral $U_n = \frac{2n+4}{3n+5}$.

Assim, temos:

$$\lim\left(\frac{2n+4}{3n+5}\right) = \lim\frac{n\left(2+\frac{4}{n}\right)}{n\left(3+\frac{5}{n}\right)} = \lim\left(\frac{2+\frac{4}{n}}{3+\frac{5}{n}}\right) = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

Resposta correta: (A)

2.

Dados ordenados, relativos à produção de pera:

10 929   11 565   <u>12 197</u>   17 530   20 208, com mediana <u>12 197</u>

Dados ordenados, relativos à produção de maçã:

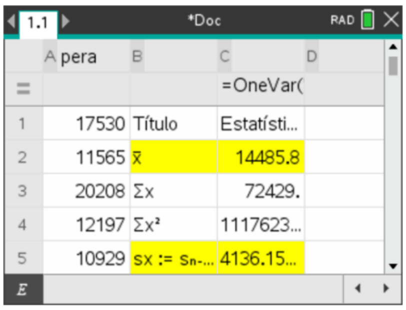
20 087   21 072   <u>21 330</u>   26 067   26 644, com mediana 21 330

A mediana excede a produção de maçã em **9 133** = (21 330 – 12 127) **- I c)**

Aumento da produção de maçã de 2020 para 2021: **6 577** = (26 664 – 20 087)

Percentagem do aumento: $100 \times \frac{6577}{20087} \approx 33\%$ (32,7…%) **- II b)**

Média e desvio padrão dos dados relativos à produção de pera: 14 485.8 e 4136.2, respetivamente, cuja soma é aproximadamente 18 622.



A produção não foi inferior ou igual a 18 622 apenas em 2021, pelo que são 4 os anos em que esta produção foi inferior à soma da média com o desvio padrão – **III c)**

Produção acumulada de maçã, de 2019 a 2024: 136 270

Produção acumulada de pera, de 2019 a 2024: <u>81 762</u> = (0.6*136 270)

Produção acumulada de pera, de 2019 a 2023: 72 429

Produção acumulada de pera, em 2024: **9333** = (81762 – 72 429) – **IV b)**

3.

3.1.

A função f é contínua em $x=0$ se e só se $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$.

Calculemos cada um dos limites laterais, bem como a imagem da função em $x=0$.

Ora,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1-\frac{1}{e^x}}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^x-1}{x\times e^x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{e^x}\right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}_{\textit{Limite notável}} \times \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{e^x} = 1\times 1 = 1$$

Por sua vez,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2+\ln(ex+e)}{x+1}\right) = \frac{0+\ln(e)}{1} = 1$$

Finalmente, $f(0)=1$.

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$, concluímos que a função f é contínua em $x=0$.

3.2.

A reta de equação $y = x - 1$ é assintota ao gráfico de f quando $x \to +\infty$ se $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)-(x-1)\right) = 0$.

Ora,

$$\lim_{x\to +\infty}\left(f(x)-(x-1)\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+\ln(ex+e)}{x+1}-(x-1)\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+\ln(ex+e)-(x+1)(x-1)}{x+1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+\ln(ex+e)-x^2+1}{x+1}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(ex+e)+1}{x+1}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln\left(e(x+1)\right)+1}{x+1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(e)+\ln(x+1)+1}{x+1}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1+\ln(x+1)+1}{x+1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}+\frac{2}{x+1}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) + \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{x+1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) + 0 = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)$$

Fazendo uma mudança de variável do tipo $y=x+1$ no $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)$ obtemos $\lim\limits_{y\to +\infty}\left(\frac{\ln y}{y}\right)$, pelo que,

como $\lim\limits_{y\to +\infty}\left(\frac{\ln y}{y}\right) = 0$, logo $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = 0$.

Portanto, a reta de equação $y = x - 1$ é assíntota ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

4.

A equação $\frac{1}{2}e^x\, ln(4-x)^2 - 5ln\,(4-x) = (5-e^x)ln\,(7-2x)$ tem como domínio:

$D = \{x \in \mathbb{R}: (4-x)^2 > 0\ \wedge 4-x > 0 \wedge 7-2x > 0\} = \{x \in \mathbb{R}: -x > -4 \wedge -2x > -7\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R}: x < 4 \wedge x < \frac{7}{2}\right\} = \left]-\infty, \frac{7}{2}\right[$.

Em D,

$$\frac{1}{2}e^x\, ln(4-x)^2 - 5\, ln(4-x) = (5-e^x)\, ln(7-2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times 2e^x\, ln(4-x) - 5\ln(4-x) - (5-e^x)\, ln(7-2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ln(4-x)\ (e^x-5) + (e^x-5)\, ln(7-2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x-5)\,[ln(4-x) + \ ln(7-2x)\,] = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x - 5 = 0\ \vee ln[(4-x)(7-2x)] = 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = 5\ \vee 28 - 8x - 7x + 2x^2 = 1\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = ln\,5\ \vee\ 2x^2 - 15x + 27 = 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 5\ \ \vee\ \ x = 3\ \ \vee\ \ x = \frac{9}{2}$$

Como $\frac{9}{2}\ \notin\ D$, então $C.S. = \{ln5, 3\,\}$.

5.

Sabe-se que $P(A \cap \bar{B}) = 0{,}5$, logo $P(A) - P(A \cap B) = 0{,}5$.

Como $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}3$, vem que $P(\overline{A \cup B}) = 0{,}3\ \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}7$.

Portanto,

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7\ \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) + P(B) = 0{,}7$$

$$\Leftrightarrow 0{,}5 + P(B) = 0{,}7$$

$$\Leftrightarrow P(B) = 0{,}2$$

Resposta correta: (A)

6.

Sabe-se que são 25 alunos, dos quais 64% são rapazes, pelo que a turma é constituída por $0{,}64 \times 25 = 16$ rapazes.

Assim, a turma é constituída por 16 rapazes e 9 raparigas.

Além disso, sabe-se que $\frac{3}{4}$ dos rapazes têm 17 anos e $\frac{1}{3}$ das raparigas têm 18 anos.

Logo, $\frac{3}{4} \times 16 = 12$ e $\frac{1}{3} \times 9 = 3$ de onde se conclui que:

- 12 dos rapazes têm 17 anos e 4 rapazes têm 18 anos;
- 3 raparigas têm 18 anos e 6 raparigas têm 17 anos.

Como queremos constituir um grupo de 6 alunos dos 25 alunos da turma, então o número de casos possíveis é dado por: ${}^{25}C_6$.

Dado que a Isabel e o José fazem parte do grupo e têm ambos 17 anos, então dois alunos já estão escolhidos e ficamos com 16 alunos com 17 anos dos quais queremos escolher um.

Os três restantes temos de escolher entre o universo dos 7 alunos com 18 anos.

Número de casos favoráveis: $1 \times 1 \times 16 \times {}^{7}C_3$.

Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{16 \times {}^{7}C_3}{{}^{25}C_6} \approx 0{,}003$.

7.

M pertence à bissetriz do primeiro quadrante pelo que, o número complexo que tem por afixo M tem argumento igual a $\frac{\pi}{4}$.

O ângulo ZOM tem de amplitude $\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{15} = \frac{7\pi}{60}$, logo o ângulo ZOW tem de amplitude $2 \times \frac{7\pi}{60} = \frac{7\pi}{30}$.

Sendo assim, o argumento do número complexo w será igual a $\frac{2\pi}{15} + \frac{7\pi}{30} = \frac{11\pi}{30}$

Resposta correta: (D)

8.

Seja $z = x + y\,i$

Temos que, $\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Re}(z) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{y} - \mathrm{x} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{y} = \mathrm{x} + 1$

$$z = \frac{5ai^{15}}{1 - 2\,i} + \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}} \Leftrightarrow \mathrm{z} = \frac{5ai^{3}}{1 - 2\,i} + \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{z} = \frac{-5a\,i}{1 - 2\,i} + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow \mathrm{z} = \frac{-5a\,i\,(1 + 2\,i)}{1 + 4} + 1 - i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{z} = \frac{-5a\,i - 10a\,i^2}{5} + 1 - i \Leftrightarrow \mathrm{z} = \frac{-5a\,i + 10a}{5} + 1 - i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{z} = 2a - a\,\mathrm{i} + 1 - \mathrm{i} \Leftrightarrow \mathrm{z} = (2a + 1) + (-a - 1)\,\mathrm{i}$$

Logo, $\operatorname{Re}(z) = \mathrm{x} = 2a + 1$ e $\operatorname{Im}(z) = \mathrm{y} = -a - 1$

Como $\mathrm{y} = \mathrm{x} + 1$ vem $-a - 1 = 2a + 1 + 1 \Leftrightarrow a = -1$

Então, $\mathrm{z} = (2 \times (-1) + 1) + (-(-1) - 1)\,\mathrm{i} \Leftrightarrow \mathrm{z} = -1 + 0\,\mathrm{i} \Leftrightarrow \mathrm{z} = -1$ ou seja $z = e^{i\pi}$

9.

$A(\cos\alpha, \sin\alpha)$; $B(1, \tan\alpha)$ e $C(0, \sin\alpha)$

Sendo h a altura do triângulo de base [AC] vem $\mathrm{h} = \overline{OC} - \tan\alpha = \sin\alpha - \tan\alpha$

A= Área do triângulo [ABC]

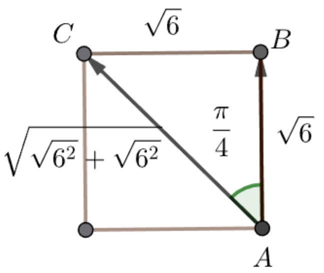
$$\mathrm{A} = \frac{\overline{\mathrm{AC}} \times \mathrm{h}}{2} = \frac{-\cos\alpha \times (\sin\alpha - \tan\alpha)}{2} = \frac{-\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha \times \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{2} =$$

$$= \frac{-\cos\alpha\sin\alpha + \sin\alpha}{2} = \frac{-2\cos\alpha\sin\alpha + 2\sin\alpha}{4} =$$

$$= \frac{2\sin\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha}{4} = \frac{2\sin\alpha - \sin(2\alpha)}{4}$$

10.

10.1.



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|\cos\left(B\hat{A}C\right) = \sqrt{6}\times\sqrt{12}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 6$$

Nota que: $\sqrt{\sqrt{6^2}+\sqrt{6^2}} = \sqrt{6+6} = \sqrt{12}$

Resposta correta: (D)

10.2.

Como sabemos que o volume da pirâmide é $4\sqrt{6}$ e $V \in VM$, calculemos $\|\overrightarrow{VM}\|$:

$$V_{Pir} = 4\sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}^2 \times \|\overrightarrow{VM}\|}{3} = 4\sqrt{6} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{VM}\| = 2\sqrt{6}$$

Uma equação vetorial da reta VM é: $(x,y,z) = (2,-1,3) + k(2,-1,1), k \in \mathbb{R}$, pelo que um ponto genérico desta reta é da forma $(2+2k,-1-k,3+k)$.

Assim,

$\overrightarrow{VM} = (2,-1,3) - (2+2k,-1-k,3+k) = (2-2-2k,-1+1+k,3-3-k) = (-2k,k,-k)$

Logo, $\|\overrightarrow{VM}\| = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow 4k^2+k^2+k^2 = 24 \Leftrightarrow k^2 = 4$

Como a abcissa de V é positiva, $k = 2$ *e* $V(6,-3,5)$.

10.3.

Tendo em conta as condições do problema, poderemos pintar as cinco faces da pirâmide com 4 ou com 5 cores.

Se considerarmos pintar com quatro cores, existem ${}^6C_4$ maneiras de escolher quatro das seis cores disponíveis para pintar as faces da pirâmide e para cada uma das maneiras consideradas, existem duas maneiras de escolher as faces opostas, faces sem arestas em comum e como tal têm que ser pintadas com cores iguais.

Por sua vez depois de considerarmos as $2\square{}^6C_4$ maneiras de pintarmos as faces, temos de ter em conta que são quatro cores e como tal há, para cada uma das $2\square{}^6C_4$ maneiras, 4! escolhas possíveis.

Se considerarmos pintar com cinco cores, existem ${}^6A_5$ maneiras de pintar as faces com as cinco das seis cores disponíveis, trata-se de considerar todas as sequências de cinco elementos (cores escolhidas e faces a pintar) que é possível formar com um conjunto com seis elementos (cores disponíveis).

11.

11.1.

Para estudar a função g, no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, determinemos a segunda derivada da função.

Sabendo que $g'(x) = \cos(3x) + \frac{3}{2}x + 1$, temos:

$$g''(x) = \left(\cos(3x) + \frac{3}{2}x + 1\right)' = -3sen(3x) + \frac{3}{2}$$

Determinando os zeros da segunda derivada:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -3sen(3x) + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow -3sen(3x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow sen(3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \ 3x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi \vee \ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então $x = \frac{\pi}{18} \vee x = \frac{5\pi}{18}$.

Podemos construir a tabela:

	0		$\frac{\pi}{18}$		$\frac{5\pi}{18}$		$\frac{\pi}{2}$
Sinal de g'	n. d.	$+$	0	$-$	0	$+$	n. d.
Concavidades do gráfico de g	n. d.	$\cup$	$g\left(\frac{\pi}{18}\right)$	$\cap$	$g\left(\frac{5\pi}{18}\right)$	$\cup$	n. d.

Concluímos, pela análise da tabela que:

O gráfico da função g tem a concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{\pi}{18}\right]$ e em $\left[\frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{2}\right[$ e a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}\right]$.

As abcissas dos pontos de inflexão do gráfico da função g são: $\frac{\pi}{18}$ e $\frac{5\pi}{18}$.

11.2.

Como a reta r é tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 0 , o seu declive é igual a $g'(0)$.
Assim, temos:

$$m_r = g'(0) = \cos(0) + \frac{3}{2} \times 0 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Como a reta s é perpendicular à reta r , então o declive de s é:

$$m_s = -\frac{1}{2}$$

Logo a reta s é definida por uma equação reduzida da forma:

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

Sabe-se ainda que a reta s intersecta os eixos Ox e Oy nos pontos A e B, que terão de coordenadas $(a, 0)$ e $(0, b)$, em que b é a ordenada na origem da reta s.

E como o ponto A pertence à reta s, temos;

$$0 = -\frac{1}{2}a + b \Leftrightarrow \frac{1}{2}a = b \Leftrightarrow a = 2b, \text{ com } a \text{ e } b \text{ positivos.}$$

Como o triângulo $[OAB]$ tem área igual a 12, tem-se que $\frac{a \times b}{2} = 12$

Logo:

$$\begin{cases} a = 2b \\ \dfrac{a \times b}{2} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a \times b = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 2b \times b = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 2b^2 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b^2 = 12 \end{cases} \underset{(b>0)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a = 2b \\ b = \sqrt{12} \end{cases} \underset{(a>0)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a = 4\sqrt{3} \\ b = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

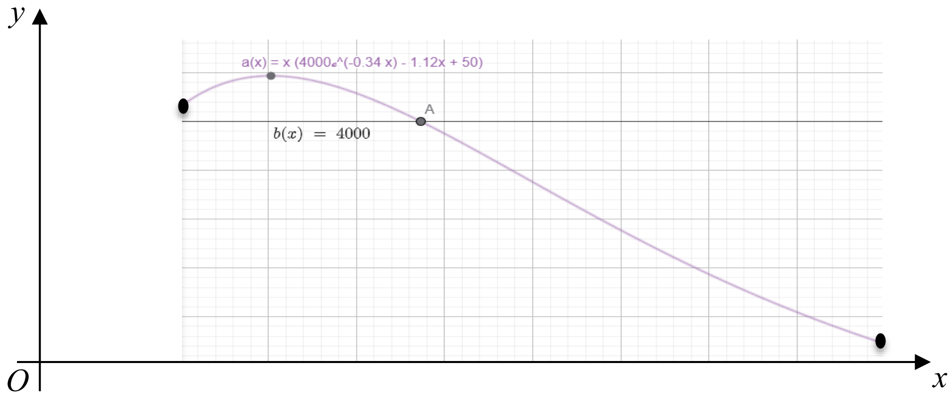
Conclui-se assim que a abcissa do ponto A é $4\sqrt{3}$.

12.

Comecemos por verificar que o valor obtido, em centenas de euros, com a venda de p bicicletas é dada por:

$$p \times N(p) = p \times (4000 \times e^{-0,34p} - 1,12p + 50), \text{ com } 2 \leq p \leq 10$$

Introduzindo esta expressão na calculadora e a reta de equação $y = 4000$, na janela de visualização, $[2, 10] \times [1500, 5000]$, por exemplo, obtém-se a seguinte representação gráfica:



Sendo $A(4,73; 4000)$, conclui-se que o preço de cada bicicleta é de 473€.

13.

As áreas (A_n) das quatro primeiras composições geométricas da construção do Tapete de Sierpinski, assumindo que a área do primeiro quadrado é 9, pode ser dada por:

$A_1 = 9$

$A_2 = 9 - \dfrac{1}{9} \times 9 = 9 - 1$

$A_3 = 9 - \dfrac{1}{9} \times 9 - \dfrac{1}{9^2} \times 9 \times 8 = 9 - 1 - \dfrac{8}{9}$

$A_4 = 9 - \dfrac{1}{9} \times 9 - \dfrac{1}{9^2} \times 9 \times 8 - \dfrac{1}{9^3} \times 9 \times 8^2 = 9 - 1 - \dfrac{8}{9} - \left(\dfrac{8}{9}\right)^2$

Generalizando, obtém-se, para as primeiras n composições geométricas da construção do Tapete de Sierpinski, assumindo que a área do primeiro quadrado é 9:

$$A_n = 9 - 1 - \frac{8}{9} - \left(\frac{8}{9}\right)^2 - \cdots - \left(\frac{8}{9}\right)^{n-2} = 9 - \left(1 + \frac{8}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{8}{9}\right)^{n-2}\right) = 9 - 1 \times \frac{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}}{1 - \frac{8}{9}} =$$

$$= 9 - 9 \times \left(1 - \left(\tfrac{8}{9}\right)^{n-1}\right) = 9 - 9 + 9 \times \left(\tfrac{8}{9}\right)^{n-1} = 9 \times \left(\tfrac{8}{9}\right)^{n-1}$$

Para obter o resultado pretendido basta substituir n por 50, isto é, $A_{50} = 9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{49} \approx 0,028$.

14.

Sabe-se que $a \in \mathbb{R}^+$, $D_h = [0, a]$ e $CD_h = [0, a]$.

Pretende-se provar que existe solução para a equação $h(x) = x$, em $[0, a]$.

(1) Note-se que se $h(0) = 0$ ou $h(a) = a$, tem-se que os pontos de abcissa 0 ou a satisfazem o pretendido.

(2) Considere-se a função p definida por $p(x) = h(x) - x$ tal que $h(0) \neq 0$ e $h(a) \neq a$, definida em $[0, a]$.

Tem-se que p é continua em $[0, a]$ por ser definida por uma diferença de duas funções contínuas em $[0, a]$.

Por outro lado,

$p(0) = h(0) - 0 = h(0) > 0$, pois $CD_h = [0, a]$ e $h(0) \neq 0$ e

$p(a) = h(a) - a < 0$, pois $0 \leq h(a) \leq a$ e $h(a) \neq a$

Donde se conclui que: $p(a) < 0 < p(0)$

Por teorema de Bolzano-Cauchy, tem-se que $\exists c \in]0, a[: p(c) = 0$, isto é, existe pelo menos um ponto, de abcissa em $]0, a[$, do gráfico de h que pertence à bissetriz do primeiro quadrante.

Por (1) e (2), conclui-se que existe, pelo menos, um ponto do gráfico da função h que pertence à bissetriz do primeiro quadrante.

FIM